Structures conformes asymptotiquement plates

Guillaume Vassal

Structures conformes asymptotiquement plates

Guillaume Vassal

14 octobre 2008

Résumé

Dans la première partie de cet article, nous présentons la théorie des structures de Weyl et des spineurs à poids sur une variété conforme. Dans la seconde partie, nous introduisons la notion de structure de Weyl asymptotiquement plate, la masse associée et nous démontrons le théorème de la masse positive dans le cadre de la géométrie spinorielle conforme.

MSC 2000 : 53A30, 53C27, 46E35.

mots clés : Structure de Weyl, spineur à poids, variété asymptotiquement plate, théorème de la masse positive.

Table des matières

Introduction

Une variété riemannienne M est asymptotiquement plate s'il existe un compact K tel que les composantes connexes de $M \setminus K$ sont difféomorphes à l'espace $\mathbb{R}^n$ privé d'une boule, et si dans ces ouverts, la métrique est asymptotique à la métrique plate de $\mathbb{R}^n$. Sous certaines conditions, un invariant géométrique calculé à l'infini leur est associée : c'est la *masse* de la variété asymptotiquement plate. Dans un cadre spinoriel, E. Witten [14] démontre que cette masse est positive si la courbure scalaire de la variété est positive et que ces variétés possèdent une certaine rigidité puisque la masse est nulle si et seulement si la variété est isométrique à l'espace euclidien. Rendue rigoureuse par T. Parker et C. H. Taubes [11], la méthode repose sur la formule de Lichnerowicz. Une fois intégrée, cette formule fournit un terme de bord qui, sous les bonnes hypothèses, converge vers la masse de la variété riemannienne asymptotiquement plate. Cette formule permet alors de montrer le résultat de positivité de la masse, ainsi que le cas d'égalité.

P. T. Chruściel et M. Herzlich [2] ont défini une masse pour des variétés asymptotiquement hyperboliques et ont démontré un théorème de masse positive dans ce cadre. Dans [3], Xianzhe Dai généralise le théorème de masse positive au cas où la variété est asymptotique au produit $\mathbb{R}^n \times X$, où X est une variété compacte simplement connexe de Calabi-Yau ou une variété hyper-Kählerienne. Récemment, V. Minerbe [9], en s'appuyant sur la méthode de E. Witten, a établi le théorème de masse positive pour des variétés complètes non compactes asymptotiques à une fibration en cercles sur une base euclidienne, dont les fibres sont asymptotiquement de longueur constante.

Dans cet article, nous allons nous intéresser au cas d'une variété M munie d'une classe conforme c. Nous allons alors généraliser la notion de platitude asymptotique aux structures de Weyl sur (M, c). Nous dirons que (M, c, D) est une structure de Weyl asymptotiquement plate lorsque D est une connexion de Weyl sur (M, c) et s'il existe une métrique g dans la classe conforme c telles que la variété riemannienne (M, g) est asymptotiquement plate et que la 1-forme de Lee de D relative à g possède un bon comportement asymptotique à l'infini. Nous définirons alors une notion de masse associée à cette structure généralisant la masse d'une variété asymptotiquement plate. Nous verrons que cette masse est invariante pour certaines sous-classes de métriques de la classe conforme et nous étudierons la façon dont elle évolue par passage d'une classe à l'autre.

Dans le cadre de la théorie des spineurs à poids, P. Gauduchon [6] et A. Moroianu [10] ont établi la formule de Lichnerowicz conforme pour les structures de Weyl sur les fibrés de spineurs à poids. La masse des structures de Weyl asymptotiquement plates apparaît naturellement dans l'intégrale du terme de bord de cette formule. Ce calcul nous permet de montrer sa positivité dans le cas où la courbure scalaire de la connexion de Weyl est positive.

Nous commencerons par des rappels de géométrie conforme sur les structures de Weyl, et les spineurs à poids. Nous démontrerons la formule de Lichnerowicz conforme et donnerons l'expression de son terme de bord. Après de brefs rappels dans le cadre riemannien, nous définirons ensuite avec précision la notion de structure conforme asymptotiquement plate et de la masse associée en donnant ses propriétés d'invariance. Enfin, nous établirons sur le modèle de la démonstration de E. Witten un théorème de masse positive pour les structures de Weyl asymptotiquement plates sur des variétés spinorielles.

Ce texte constitue une partie de ma thèse dirigée par Paul Gauduchon et de Andrei Moroianu. Je les remercie vivement pour leurs idées et pour tout le temps qu'ils m'accordent.

1 Poids conformes et spineurs

Sauf mention contraire, les variétés, les métriques et les sections des différents fibrés considérés seront C^∞.

1.1 Structures de Weyl

Soit M une variété orientée de dimension n, munie d'une structure conforme définie positive c. Rappelons quelques faits de géométrie conforme afin de pouvoir définir la notion de structure de Weyl, introduite par Hermann Weyl dans [13]. Nous noterons TM et T^*M respectivement les fibrés tangent et cotangent de M, $Gl(M)$ $(Gl^+(M))$ le fibré des repères (orientés) de TM et $CO(M)$ le sous-fibré de $Gl(M)$ des repères c-orthonormés. Le fibré $CO(M)$ que nous appelons fibré des repères conformes est un fibré principal sur M dont le groupe structural est le groupe conforme $\mathrm{CO}(n) = \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{>0}$, où $\mathbb{R}^{>0}$ est l'ensemble des réels positifs non nuls. Sur toute variété différentiable M de dimension n, nous pouvons définir une famille $L^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{R}$, de fibrés en droites réelles sur M par :

$$L^{(k)} = Gl(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R}$$

Nous dirons que $L^{(k)}$ est le fibré des scalaires de poids k. Notons L les scalaires de poids 1. Pour $k \in \mathbb{N}$, $L^{(k)}$ est la puissance tensorielle k-ième de L. Ces fibrés sont naturellement orientables, donc triviaux. De plus, lorsque la variété est munie d'une structure conforme, nous avons une réduction au fibré des repère conformes :

$$L^{(k)} = CO(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R}$$

Si ν est une représentation du groupe $\mathrm{CO}(n)$ sur un espace vectoriel V, la restriction de ν au sous-groupe des réels strictement positifs $\mathbb{R}^{>0}$ est de la forme :

$$\nu(a) = a^k \mathrm{Id}$$

pour $a \in \mathbb{R}^{>0}$ et où Id est l'identité de V. Nous dirons que le réel k est le poids conforme de la représentation ν. Soit $Gl(n)$ ($Gl^+(n)$) le groupe des isomorphismes (orientés) de $\mathbb{R}^n$. Les fibrés vectoriels sur (M, c) associés à $Gl(M)$ et obtenus par une représentation de $\mathrm{Gl}(n)$ possèdent un poids conforme naturel qui est le poids de la restriction de cette représentation au sous-groupe conforme $\mathrm{CO}(n)$. Avec cette convention, les fibrés tangent, cotangent et des p-formes sur M sont respectivement de poids naturels $+1$, -1 et $-p$. Le réel k du fibré $L^{(k)}$ est le poids de l'action de $\mathbb{R}^{>0}$. Il est facile de voir que le poids naturel d'un produit tensoriel est la somme des poids des facteurs constituant ce produit. Par exemple, le poids conforme naturel de $T^*M \otimes T^*M$ est -2.

Le complémentaire de la section nulle du fibré $L^{(k)}$ possède deux composantes connexes qui sont données par :

$$L^{(k)}_+ = CO(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R}^{>0} \text{ et } L^{(k)}_- = CO(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R}^{<0}$$

Nous utiliserons aussi le fibré complexifié $L^{(k)}_{\mathbb{C}}$ du fibré des scalaires à poids $L^{(k)}$.

Définition 1.1.1. *Une structure de Weyl sur une variété conforme (M, c) est une connexion linéaire sans torsion sur TM induite par une connexion $\mathrm{CO}(n)$-équivariante sur $\mathrm{CO}(M)$.*

Le théorème fondamental de la géométrie conforme de H. Weyl [7] est le suivant (*cf.* aussi [13] et [4]) :

Théorème 1.1.2. *L'application qui, à toute connexion linéaire D sur TM associe la connexion induite ∇^D sur L détermine, par restriction, un isomorphisme affine de l'espace des structures de Weyl sur TM sur l'espace des connections linéaires sur L.*

Soient D une structure de Weyl sur TM et ∇^D sa connexion linéaire associée sur L. Nous avons la formule de Koszul généralisée suivante :

$$\begin{aligned} 2c(D_X Y, Z) &= \nabla^D_X\big(c(Y,Z)\big) + \nabla^D_Y\big(c(Z,X)\big) - \nabla^D_Z\big(c(Y,X)\big) \\ &\quad + c(Z,[X,Y]) - c(Y,[X,Z]) - c(X,[Y,Z]) \end{aligned}$$

Cette formule démontre l'existence et l'unicité de D étant donné ∇^D.

Soit D' une autre structure de Weyl sur M, avec $\nabla^{D'}$ sa connexion linéaire sur L associée. La différence $\nabla^D - \nabla^{D'}$ est une 1-forme θ sur TM. L'isomorphisme entre les structures de Weyl et les connexions linéaires sur L nous donne la relation suivante :

$$D_X Y = D'_X Y + \theta(X)Y + (\theta \wedge X)(Y) \tag{1}$$

L'endomorphisme antisymétrique $\theta \wedge X$ de TM est défini par :

$$(\theta \wedge X)(Y) = \theta(X)Y - g(X,Y)\theta^\sharp$$

où g est une métrique quelconque dans la classe conforme, et où $\theta^\sharp$ est le dual riemannien de θ relativement à g. En particulier, nous pouvons associer à une métrique riemannienne g dans la classe conforme sa 1-forme de Lee, notée θ_g, définie par $\theta_g = \nabla^D - \nabla^g$, où ∇^g est la connexion linéaire sur L induite par la connexion de Levi-Civita de g. Notons que la connexion de Levi-Civita d'une métrique g dans c, notée D^g, est une structure de Weyl sur TM.

Définition 1.1.3. *Une structure de Weyl D est fermée (respectivement exacte) si sa connexion linéaire associée ∇^D sur le fibré L est plate (respectivement si L admet une section globale ∇^D-parallèle). De manière équivalente, une structure de Weyl D est fermée (respectivement exacte) si D est localement (respectivement globalement) la connexion de Levi-Civita d'une métrique dans la classe conforme.*

Rappelons que la classe conforme c est une section du fibré $S^2(T^*M) \otimes L^{(2)}$ telle que, pour tout champ de vecteurs X, $c(X,X)$ est une section de $L_+^{(2)}$. La famille $\{e_i\}_{i=1\dots n}$ est une base c-orthonormée de TM s'il existe une section positive l de L telle que $c(e_i,e_j) = \delta_{ij} l^2$. En particulier, la base duale $\{e_i^*\}$ de $\{e_i\}$ est donnée par :

$$e_i^*(X) = c(e_i, X) l^{-2}$$

Nous pouvons étendre les isomorphismes musicaux dans le cadre conforme : nous définissons d'une part $\flat : TM \to T^*M \otimes L^{(2)}$ par :

$$X^\flat = c(X, \cdot)$$

pour tout vecteur X de TM. D'autre part, $\sharp : T^*M \to TM \otimes L^{(-2)}$ défini par :

$$\alpha = c(\alpha^\sharp, \cdot)$$

pour toute 1-forme α sur M. Par conséquent, nous avons l'identification suivante :

$$T^*M \otimes T^*M \cong T^*M \otimes TM \otimes L^{(-2)}$$

Par contraction des formes et des vecteurs, nous obtenons alors une application de $T^*M \otimes T^*M$ dans $L^{(-2)}$: c'est la trace conforme des formes bilinéaires symétriques.

Pour tous X, Y et Z vecteurs de TM, nous définissons le tenseur de courbure de la structure de Weyl D, que nous notons R^D, par :

$$\mathrm{R}^D_{X,Y} Z = [D_X, D_Y]Z - D_{[X,Y]}Z$$

Nous pouvons voir R^D comme une section du fibré $T^*M^{\otimes^3} \otimes TM$. Nous définissons alors Ric^D le tenseur de Ricci de la structure de Weyl D par :

$$\mathrm{Ric}^D(X,Y) = \mathrm{trace}(Z \mapsto \mathrm{R}^D_{Z,X} Y)$$

pour X et Y vecteurs de TM. Le tenseur de Ricci est une section du fibré $T^*M \otimes T^*M$. En appliquant la trace conforme sur le tenseur de Ricci, nous obtenons une section de $L^{(-2)}$. Cette section, que nous notons $Scal^D$, est la courbure scalaire de la structure de Weyl.

Nous avons une correspondance entre les métriques riemanniennes dans c et les sections du fibré L^2_+ : une métrique riemannienne g et la section l^2 du fibré $L^{(2)}_+$ correspondante sont reliées par :

$$c = g \otimes l^2$$

Le choix d'une métrique dans la classe conforme détermine, à un élément du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ près, un repère orthonormé au voisinage de chaque point de M. Cependant, une section l^k du fibré $L^{(k)}$ est une classe d'équivalence sous l'action de $Gl(n)$ de la forme $[s, v]$, où s est un repère local de TM et v une fonction sur M. Par conséquent, lorsqu'une métrique est fixée dans la classe conforme, les sections des fibrés $L^{(k)}$ s'identifient à des fonctions sur la variété. Soit g une métrique dans classe conforme ; la structure de Weyl D et la connexion de Levi-Civita D^g sont liées via la 1-forme de Lee θ_g par la formule suivante :

$$D_X Y = D^g_X Y + \theta_g(X)Y + (\theta_g \wedge X)(Y) \tag{2}$$

Ainsi, la courbure scalaire de D s'identifie, via la trivialisation de L par g, à une fonction sur M par la formule suivante [7] :

$$Scal^D = Scal^g - 2(n-1)\mathrm{tr}_g(D^g\theta_g) - (n-1)(n-2)|\theta_g|^2_g \tag{3}$$

où $Scal^g$ est la courbure scalaire de la connexion de Levi-Civita D^g et tr_g la trace relative à la métrique g. Pour plus d'information concernant les structures de Weyl, le lecteur intéressé pourra consulter [7].

1.2 Spineurs conformes

Soit M une variété spinorielle de dimension n [5]. L'algèbre de Clifford réelle Cl_n associée à l'espace $(\mathbb{R}^n, \| \|)$ euclidien est l'unique algèbre réelle, à isomorphisme près, vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute $\mathbb{R}$-algèbre associative unitaire A, une application linéaire v de $\mathbb{R}^n$ dans A telle que $v(x)^2 = -\|x\|^2 1_A$, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, s'étend de façon unique en un morphisme d'algèbres de Cl_n dans A. Soient $\mathrm{Spin}(n) \subset Cl_n$ le groupe spinoriel et $\lambda : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ le revêtement à deux feuillets du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$. Soit $\mu : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}(\Delta_n)$ la représentation spinorielle de $\mathrm{Spin}(n)$ sur l'espace des spineurs Δ_n. La représentation spinorielle est la restriction de la représentation de l'algèbre de Clifford Cl_n sur l'espace Δ_n. Cette représentation induit une action de Cl_n sur Δ_n (cette action est aussi appelé multiplication de Clifford). En particulier, nous avons une inclusion canonique de $\mathbb{R}^n$ dans Cl_n, donc une action de $\mathbb{R}^n$ sur Δ_n. Nous notons $x \cdot \xi$ cet action de Clifford, où $x \in Cl_n$ et $\xi \in \Delta_n$. Rappelons qu'il existe un isomorphisme d'espace vectoriel entre Cl_n et l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ donné par :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^*\mathbb{R}^n & \to & Cl_n \\ e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} & \mapsto & e_{i_1} \cdots e_{i_k} \end{array}$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Notons que $v\wedge$ et $v\lrcorner$ sont respectivement le produit extérieur et intérieur par v sur M. Nous avons pour l'action de Clifford l'identification suivante :

$$x \cdot (\omega \cdot \xi) = (x \wedge \omega) \cdot \xi - x \lrcorner \omega \cdot \xi$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Lambda^*\mathbb{R}^n$ et $\xi \in \Delta_n$. La multiplication de Clifford est un morphisme de Spin(n)-représentations, *i.e.* :

$$\mu(\gamma)(x \cdot \xi) = (\lambda(\gamma)x) \cdot (\mu(\gamma)\xi)$$

pour $\gamma \in \mathrm{Spin}(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \in \Delta_n$. Soit g une métrique riemannienne sur M. Une structure *spin* sur (M, g) étant choisie, notons $Spin_g(M)$ le Spin(n)-fibré principal au-dessus du fibré des repères g-orthonormés directs $SO_g(M)$. Le fibré des spineurs relatif à la métrique g est défini par :

$$\Sigma^g = Spin_g(M) \times_\mu \Delta_n$$

Pour plus de détails concernant la géométrie spinorielle dans le cadre riemannien, le lecteur pourra consulter [5].

Nous définissons le groupe spinoriel conforme CSpin(n) comme le produit Spin$(n) \times \mathbb{R}^{>0}$. Pour tout $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{CSpin}(n)$, nous écrirons :

$$\widetilde{\gamma} = a\gamma$$

où $a \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma \in \mathrm{Spin}(n)$ sont uniquement déterminés. Soit $\mathrm{CO}^+(n)$; nous avons le morphisme de groupes $\widetilde{\lambda} : \mathrm{CSpin}(n) \to \mathrm{CO}^+(n)$ défini comme le produit de λ et de l'identité de $\mathbb{R}^{>0}$ et où $\mathrm{CO}^+(n) = \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{>0}$. Soit $k \in \mathbb{R}$. La représentation spinorielle conforme de poids k, notée $\mu^{(k)}$, est la représentation linéaire de CSpin(n) sur l'espace des spineurs Δ_n définie par :

$$\mu^{(k)}(\widetilde{\gamma}) = a^k \mu(\gamma)$$

pour tout $\widetilde{\gamma}$ dans CSpin(n). De la même façon que la représentation spinorielle, nous avons une relation de compatibilité entre la multiplication de Clifford et la représentation spinorielle conforme de poids k. Pour $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{CSpin}(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \in \Delta_n$, nous avons :

$$\mu^{(k)}(\widetilde{\gamma})(x \cdot \xi) = \left(\widetilde{\lambda}(\widetilde{\gamma})x\right) \cdot \left(\mu^{(k)}(\widetilde{\gamma})\xi\right)$$

Le fibré vectoriel des spineurs de poids conforme k est défini par :

$$\Sigma^{(k)} = CSpin(M) \times_{\mu^{(k)}} \Delta_n$$

Nous avons l'identification suivante :

$$\Sigma^{(k)} \cong \Sigma^{(0)} \otimes L^{(k)}$$

L'action de Clifford de TM sur l'espace des spineurs à poids est l'application

$$\begin{aligned} TM \otimes \Sigma^{(k)} &\to \Sigma^{(k+1)} \\ X \otimes \psi &\mapsto X \cdot \psi \end{aligned}$$

définie par :

$$X \cdot \psi = [\widetilde{s}, x \cdot \xi]$$

où ψ et X sont respectivement représentés par $[\widetilde{s}, \xi]$ et $[s, x]$, avec $\widetilde{s}$ un repère de CSpin(M), $s = \widetilde{\lambda}(\widetilde{s})$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.2.1. *Pour tout $g \in c$, et tout $k \in \mathbb{R}$, il existe un isomorphisme canonique de Σ^g dans $\Sigma^{(k)}$.*

Démonstration. Une métrique g dans la classe conforme définit une réduction du fibré $CSpin(M)$ à $Spin_g(M)$. Dans ce cas, nous avons :

$$CSpin(M) \times_{\mu^{(k)}} \Delta_n = Spin_g(M) \times_\mu \Delta_n$$

puisque μ est le restriction de la représentation $\mu^{(k)}$ au groupe $\mathrm{Spin}(n)$. $\square$

Soient $g \in c$ et $\widetilde{g} = f^{-2}g$, avec f une fonction réelle non nulle sur M. La proposition précédente nous donne une famille d'isomorphismes

$$\begin{array}{rcll} \Phi^{(k)} & : & \Sigma^g M & \to \Sigma^{\widetilde{g}} M \\ & & [\widetilde{s}, v] & \mapsto [\widetilde{s} f, f^{-k} v] \end{array}$$

pour tout $k \in \mathbb{R}$. Soit $\langle\, , \rangle$ le produit scalaire hermitien sur Δ_n compatible avec l'action de Clifford. Notons $(\, ,)_g$ le produit scalaire hermitien $\mathrm{Spin}(n)$-invariant sur Σ^g induit par $\langle\, , \rangle$. Les isomorphismes $\Phi^{(k)}$ ne sont pas des isométries :

$$|\Phi^{(k)}\psi|_{\widetilde{g}} = f^{-2k}|\psi|_g$$

Nous définissons une application bilinéaire h par :

$$\begin{array}{rcll} h & : & \Sigma^{(k_1)} \otimes \Sigma^{(k_2)} & \to L_{\mathbb{C}}^{(k_1+k_2)} \\ & & \psi \otimes \varphi & \mapsto [s, \langle u, v\rangle] \end{array}$$

où ψ et φ sont représentés respectivement par $[\widetilde{s}, \xi]$ et $[\widetilde{s}, \zeta]$ et où s est le projeté de $\widetilde{s}$ sur $CO(M)$.

Proposition 1.2.2. *L'application bilinéaire h est bien définie et pour tous $X \in TM$, $\psi \in \Sigma^{(k_1)}$ et $\varphi \in \Sigma^{(k_2)}$, nous avons :*

$$h(X \cdot \psi, \varphi) = -h(\psi, X \cdot \varphi) \in L_{\mathbb{C}}^{(k_1+k_2-1)}$$

Démonstration. En changeant le repère $\widetilde{s}$ par $\widetilde{s} \cdot \widetilde{\gamma}^{-1}$, où $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{CSpin}(n)$, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} \langle \mu^{(k_1)}(\widetilde{\gamma})\xi, \mu^{(k_2)}(\widetilde{\gamma})\zeta\rangle & = & \langle a^{k_1}\mu(\gamma)\xi, a^{k_2}\mu(\gamma)\zeta\rangle \\ & = & a^{k_1+k_2}\langle \mu(\gamma)\xi, \mu(\gamma)\zeta\rangle \\ & = & a^{k_1+k_2}\langle \xi, \zeta\rangle \\ & = & (\det \widetilde{\gamma})^{(k_1+k_2)/n}\langle \xi, \zeta\rangle \end{array}$$

Ce calcul montre que $[s, \langle \xi_1, \xi_2\rangle]$ est une section de $L_{\mathbb{C}}^{(k_1+k_2)}$ et donc que h est bien définie. Pour ξ, $\zeta \in \Delta_n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire hermitien sur Δ_n vérifie :

$$\langle x \cdot \xi, \zeta\rangle = -\langle \xi, x \cdot \zeta\rangle$$

Par définition de la multiplication de Clifford des spineurs à poids, il est clair que h vérifie la même relation. $\square$

Les sections du fibré $L_{\mathbb{C}}^{(-n)}$ sont des densités d'intégration sur M. Pour $k_1 + k_2 = -n$, nous définissons une application sesquilinéaire $H : C_0^\infty(\Sigma^{(k_1)}) \times C_0^\infty(\Sigma^{(k_2)}) \to \mathbb{C}$ par :

$$H(\psi, \varphi) = \int_M h(\psi, \varphi)$$

où C_0^∞ désigne l'espace des sections lisses à support compact. Soient k_1 et k_2 des réels tels que $k_1 + k_2 = -n$ et g une métrique dans la classe conforme c. Nous avons vu que les fibrés $\Sigma^{(k_1)}$ et $\Sigma^{(k_2)}$ s'identifient canoniquement au fibré Σ^g. La multiplication de Clifford définie sur les spineurs à poids s'identifie alors à la multiplication de Clifford (usuelle) sur Σ^g. D'autre part, l'image de l'application h par cette identification est le produit scalaire hermitien $(\, , \,)_g$ défini sur Σ^g. Ainsi, nous pouvons remarquer que, pour une métrique g quelconque dans c, nous avons :

$$H(\psi, \varphi) = \int_M (\psi, \varphi)_g v_g$$

où v_g est la forme volume associée à la métrique g.

Proposition 1.2.3. *Soient D et $\widetilde{D}$ deux structures de Weyl sur (M, c) reliées par (1). Ces dernières induisent deux connexions linéaires $D^{(k)}$ et $\widetilde{D}^{(k)}$ sur $\Sigma^{(k)}$ reliées par :*

$$D_X^{(k)}\psi = \widetilde{D}_X^{(k)}\psi - \frac{1}{2}X \cdot \theta \cdot \psi + (k - \frac{1}{2})\theta(X)\psi$$

pour tout ψ dans $\Sigma^{(k)}$.

Démonstration. Nous avons vu que les structures de Weyl D et $\widetilde{D}$ sont reliées par $D = \widetilde{D} + \Theta$, où $\Theta(X) = \theta \wedge X + \theta(X)\mathrm{Id}$. Les connexions induites par D et $\widetilde{D}$ sur le fibré $\Sigma^{(k)}$ vérifient donc la relation suivante :

$$D^{(k)} = \widetilde{D}^{(k)} + d\mu^{(k)}(\Theta)$$

où $d\mu^{(k)}$ est la différentielle à l'origine de la représentation linéaire de poids k de $\mathrm{CSpin}(n)$. Nous obtenons :

$$D^{(k)} = \widetilde{D}^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} d\mu(\theta \wedge e_i) \otimes e_i^* + k\mathrm{Id} \otimes \theta$$

Cela donne, pour $\psi \in \Sigma^{(k)}$ et $X \in TM$, la formule suivante :

$$D_X^{(k)}\psi = \widetilde{D}_X^{(k)}\psi + \frac{1}{2}(\theta \wedge X) \cdot \psi + k\theta(X)\psi$$

De plus, d'après la définition du produit de Clifford des 2-formes, nous avons :

$$X \cdot \theta = -\theta \wedge X - \theta(X)$$

Nous obtenons alors la formule souhaitée. □

Soient D une structure de Weyl sur (M, c), k un réel et $D^{(k)}$ la connexion induite par D sur $\Sigma^{(k)}$. Soit $g \in c$. La connexion de Levi-Civita D^g de g est une structure de Weyl sur TM. La connexion D^g détermine donc une connexion linéaire sur le fibré des spineurs à poids $\Sigma^{(k)}$. Nous continuons de noter D^g cette connexion. La proposition précédente nous donne la relation suivante :

$$D_X^{(k)}\psi = D_X^g\psi - \frac{1}{2}X \cdot \theta_g \cdot \psi + (k - \frac{1}{2})\theta_g(X)\psi \tag{4}$$

pour tout ψ dans $\Sigma^{(k)}$ et tout X dans TM.

Soit D' une autre structure de Weyl. Nous avons ∇^D et $\nabla^{D'}$ les connexions linéaires sur L associées respectivement aux structures de Weyl D et D'. Ces connexions induisent des connexions linéaires sur les fibrés $L^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{R}$, que l'on note toujours ∇^D et $\nabla^{D'}$. Nous avons vu qu'il existe une 1-forme θ sur M telle que $\nabla^D = \nabla^{D'} + \theta$. Par conséquent, pour toute section l^k de $L^{(k)}$ et tout vecteur X de TM, nous avons :

$$\nabla^D_X l^k = \nabla^{D'}_X l^k + k\theta(X) l^k$$

En particulier, si nous fixons une métrique g de la classe conforme, les sections de $L^{(k)}$ s'identifient à des fonctions sur M. Ainsi, lorsque D' est la connexion de Levi-Civita de g, nous obtenons :

$$\nabla^D_X l^k = dl^k(X) + k\theta_g(X) l^k$$

Soit $\mathscr{D}^g : \Sigma^g \to \Sigma^g$ l'opérateur de Dirac agissant sur le fibré des spineurs relatif à la métrique g. L'opérateur $\mathscr{D}^g$ est défini comme la composition de la multiplication de Clifford et de la connexion induite par D^g sur Σ^g. Cet opérateur de Dirac est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 et elliptique. Pour plus de détails, nous renvoyons de nouveau le lecteur à [5]. La multiplication de Clifford sur les spineurs à poids définit une contraction, notée $m^{(k)}$, sur les spineurs de poids k :

$$\begin{array}{rccl} m^{(k)} & : & T^*M \otimes \Sigma^{(k)} & \to \Sigma^{(k-1)} \\ & & \omega \otimes \psi & \mapsto \omega \cdot \psi \end{array}$$

Nous considérons la connexion $D^{(k)}$ comme un opérateur de $\Sigma^{(k)}$ dans $T^*M \otimes \Sigma^{(k)}$. Nous définissons alors l'opérateur de Dirac de poids k par :

$$\mathscr{D}^{(k)} \ : \ \Sigma^{(k)} \xrightarrow{m^{(k)} \circ D^{(k)}} \Sigma^{(k-1)}$$

De cette façon, la connexion de Levi-Civita D^g agissant sur les sections de $\Sigma^{(k)}$ détermine un opérateur de Dirac de poids k. Lorsque les spineurs de poids k sont identifiés à des spineurs de Σ^g, via le choix de la métrique g, cet opérateur de Dirac à poids s'identifie tautologiquement à l'opérateur de Dirac usuel $\mathscr{D}^g$ sur Σ^g. Les calculs qui suivent sont effectués dans les différents espaces à poids mentionnés. En revanche, si une métrique est fixée, les calculs se ramènent, via les identifications induites par la métrique, au cas riemannien, en identifiant les différents objets à leurs correspondants riemanniens respectifs.

Proposition 1.2.4. *Soient g une métrique de la classe conforme c et D une structure de Weyl sur (M, c) dont la forme de Lee par rapport à g est θ_g. Les opérateurs de Dirac $\mathscr{D}^g$ et $\mathscr{D}^{(k)}$ agissant sur les sections de $\Sigma^{(k)}$ sont reliés par la formule suivante :*

$$\mathscr{D}^{(k)}\psi = \mathscr{D}^g\psi + (k + \frac{1}{2}(n-1))\theta_g \cdot \psi$$

pour toute section ψ de $\Sigma^{(k)}$.

Démonstration. La proposition 1.2.3 nous donne :

$$D^{(k)}_X\psi = D^g_X\psi + (k - \frac{1}{2})\theta_g(X)\psi - \frac{1}{2} X \cdot \theta_g \cdot \psi$$

Par conséquent, dans une base $\{e_i\}$ g-orthonormée, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathscr{D}^{(k)}\psi &= \mathscr{D}^g\psi + (k - \frac{1}{2})\sum_{i=1}^n \theta_g(e_i) e_i \cdot \psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i \cdot e_i \cdot \theta_g \cdot \psi \\ &= \mathscr{D}^g\psi + (k - \frac{1}{2})\theta_g \cdot \psi + \frac{n}{2}\theta_g \cdot \psi \end{aligned}$$

□

1.3 Formule de Lichnerowicz conforme I

Dans le cas des spineurs associés à une métrique riemannienne, la formule de Lichnerowicz relie le carré de l'opérateur de Dirac, l'opérateur de Laplace-Beltrami et la courbure scalaire de la métrique. Fixons une métrique g dans la classe conforme c et une structure de Weyl D sur M. Nous avons la proposition suivante [5] :

Proposition 1.3.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n, orientée, et spinorielle. Pour ψ dans Σ^g, nous avons la formule de Lichnerowicz suivante :*

$$(\mathscr{D}^g)^2\psi = \mathrm{tr}(D^{g,2})(\psi) + \frac{1}{4}Scal^g\psi$$

où $D^{g,2}$ est la dérivée covariante seconde et $Scal^g$ la courbure scalaire de la connexion de Levi-Civita.

Dans le cadre des spineurs à poids, P. Gauduchon [6] et A. Moroianu [10] ont établi une formule de Lichnerowicz conforme. Soit k un réel. Etant donnée une structure de Weyl, l'opérateur de Dirac de poids k agit sur les sections de spineurs de poids k mais celui-ci fournit des sections de spineurs de poids $k-1$. Par conséquent, nous définissons le carré de l'opérateur de Dirac de poids k comme la composition $\mathscr{D}^{(k-1)} \circ \mathscr{D}^{(k)}$, qui est un opérateur défini sur les sections de $\Sigma^{(k)}$ et à valeurs dans l'espace des sections de $\Sigma^{(k-2)}$.

Proposition 1.3.2. *Soit ψ un spineur de poids k. Le carré de l'opérateur de Dirac à poids associé à une structure de Weyl dont la forme de Lee est θ_g est donné par :*

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}^2\psi &= \mathscr{D}^{(k-1)}\mathscr{D}^{(k)}\psi \\
&= (\mathscr{D}^g)^2\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi - \theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi \\
&\quad -(2k+n-1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi - \Big(k^2 - k(2-n) + \frac{n^2-4n+3}{4}\Big)|\theta_g|_g^2\psi
\end{aligned}$$

Démonstration. Soient x dans M et $\{e_i\}$ une base g-orthonormée de T_xM. Dans cette base, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}^{(k-1)}\mathscr{D}^{(k)}\psi = \mathscr{D}^{(k-1)}(\mathscr{D}^g\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\psi) \\
=\ & \mathscr{D}^g(\mathscr{D}^g\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\psi) + (k-1+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot(\mathscr{D}^g\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\psi) \\
=\ & (\mathscr{D}^g)^2\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi - (k+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi - (2k+(n-1))D^g_{\theta_g^\sharp}\psi \\
& +(k-1+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi - (k-1+\frac{1}{2}(n-1))(k+\frac{1}{2}(n-1))|\theta_g|_g^2\psi \\
=\ & (\mathscr{D}^g)^2\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi - \theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi - (2k+n-1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi \\
& -(k+\frac{1}{2}(n-1))(k-1+\frac{1}{2}(n-1))|\theta_g|_g^2\psi
\end{aligned}$$

□

Comme pour toute connexion sans torsion, nous définissons la connexion de Weyl seconde de poids k par :

$$D^{(k),2}_{X,Y}\psi = D^{(k)}_X(D^{(k)}_Y\psi) - D^{(k)}_{D_XY}\psi$$

où X et Y sont des champs de vecteurs de TM, et $\psi \in \Sigma^{(k)}$. La connexion de Weyl seconde de poids k peut être vue comme un opérateur agissant sur les sections de $\Sigma^{(k)}$ à valeurs dans l'espace des sections de $T^*M \otimes T^*M \otimes \Sigma^{(k)}$. En appliquant la trace conforme et en rappelant que $L^{(-2)} \otimes \Sigma^{(k)} \cong \Sigma^{(k-2)}$, nous obtenons l'application $\mathrm{tr}(D^{(k),2}) : \Sigma^{(k)} \to \Sigma^{(k-2)}$.

Proposition 1.3.3. *Soient $\{e_i\}$ un repère local c-orthonormé tel que $c(e_i, e_j) = \delta_{ij} l^2$, où $l \in L$, et ψ une section de $\Sigma^{(k)}$. Une écriture locale de $\mathrm{tr}(D^{(k),2})$ est donnée par :*

$$\mathrm{tr}(D^{(k),2})(\psi) = -\sum_{i=1}^{n} \left(D^{(k)}_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi) - D^{(k)}_{D_{e_i}e_i}\psi \right) l^{-2}$$

Démonstration. Montrons que l'expression ne dépend pas du choix du repère c-orthonormé. Soit $\{\widetilde{e}_i\}$ une base c-orthonormée. Il existe un champ de matrices conformes $A = (a_{ij})$ tel que :

$$\widetilde{e}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k$$

Nous avons ${}^tAA = f^2$, où f est une fonction sur M. De manière équivalente, nous avons la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} f^2$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} c(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik} a_{jl} c(e_k, c_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} l^2 \\ &= \delta_{ij} (fl)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons $c(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) = \widetilde{l}^2$, où $\widetilde{l} = fl$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left(D^{(k)}_{\widetilde{e}_i}(D^{(k)}_{\widetilde{e}_i}\psi) - D^{(k)}_{D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i}\psi \right) \widetilde{l}^{-2} &= \sum_{i,p,q=1}^{n} \left(a_{ip} a_{iq} D^{(k)}_{e_p}(D^{(k)}_{e_q}\psi) + D^{(k)}_{\widetilde{e}_i}(a_{iq}) D^{(k)}_{e_q}\psi \right) \widetilde{l}^{-2} \\ &\quad - \sum_{i,p,q=1}^{n} \left(a_{ip} a_{iq} D^{(k)}_{D_{e_p}e_q}\psi + D^{(k)}_{\widetilde{e}_i}(a_{iq}) D^{(k)}_{e_q}\psi \right) \widetilde{l}^{-2} \\ &= \sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ip} a_{iq} \right) \left(D^{(k)}_{e_p}(D^{(k)}_{e_q}\psi) - D^{(k)}_{D_{e_p}e_q}\psi \right) \widetilde{l}^{-2} \\ &= \sum_{p,q=1}^{n} \delta_{pq} \left(D^{(k)}_{e_p}(D^{(k)}_{e_q}\psi) - D^{(k)}_{D_{e_p}e_q}\psi \right) f^2 \widetilde{l}^{-2} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left(D^{(k)}_{e_p}(D^{(k)}_{e_p}\psi) - D^{(k)}_{D_{e_p}e_p}\psi \right) l^{-2} \end{aligned}$$

□

Dans tout ce qui suit, nous noterons D et $\mathscr{D}$ respectivement la dérivée covariante et l'opérateur de Dirac induits par la structure de Weyl D sur le fibré des spineurs de poids conforme $\dfrac{2-n}{2}$.

Théorème 1.3.4. *Soit D une structure de Weyl. Soient D et $\mathscr{D}$ respectivement la dérivée covariante et l'opérateur de Dirac à poids agissant sur le fibré des spineurs à poids $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. Pour toutes sections ψ de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$, nous avons la formule de Lichnerowicz conforme I suivante :*

$$\mathscr{D}^2\psi = \mathrm{tr}(D^2)(\psi) + \frac{1}{4}Scal^D\psi$$

Remarque 1.3.5. *Dans le théorème 1.3.4, nous omettons le symbole $\otimes$ du produit tensoriel $Scal^D\psi$ de la section $Scal^D$ du fibré $L^{(-2)}$ et de la section ψ de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. En rappelant que $\Sigma^{(k)} \otimes L^{(-2)} \cong \Sigma^{(k-2)}$, nous remarquons que $Scal^D\psi$ est bien une section de $\Sigma^{(k-2)}$. La formule donnée par ce théorème relie bien des objets de même poids conforme $-1-\dfrac{n}{2}$.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$, ψ et ϕ dans $\Sigma^{(k)}$, $x \in M$ et $\{e_i\}$ une base de T_xM. Fixons une métrique g dans c. Supposons que la base $\{e_i\}$ est parallèle en un point pour la connexion de Levi-Civita D^g. Nous avons en ce point :

$$\begin{aligned}
D^{(k)}_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi) &= D^g_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi) + (k-\frac{1}{2})\theta_g(e_i)D^{(k)}_{e_i}\psi - \frac{1}{2}e_i\cdot\theta_g\cdot D^{(k)}_{e_i}\psi \\
&= D^g_{e_i}(D^g_{e_i}\psi) + (k-\frac{1}{2})D^g_{e_i}(\theta_g(e_i))\psi + (2k-1)\theta_g(e_i)D^g_{e_i}\psi - \frac{1}{2}e_i\cdot D^g_{e_i}(\theta_g)\cdot\psi \\
&\quad -e_i\cdot\theta_g\cdot D^g_{e_i}\psi + (k-\frac{1}{2})^2\theta_g(e_i)^2\psi - (k-\frac{1}{2})\theta_g(e_i)e_i\cdot\theta_g\cdot\psi \\
&\quad +\frac{1}{4}e_i\cdot\theta_g\cdot e_i\cdot\theta_g\cdot\psi
\end{aligned}$$

Les propriétés de la multiplication de Clifford nous donnent alors :

$$\begin{aligned}
D^{(k)}_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi) &= D^g_{e_i}(D^g_{e_i}\psi) + (k-\frac{1}{2})D^g_{e_i}(\theta_g(e_i))\psi + (2k+1)\theta_g(e_i)D^g_{e_i}\psi \\
&\quad -\frac{1}{2}e_i\cdot D^g_{e_i}(\theta_g)\cdot\psi + \theta_g\cdot e_i\cdot D^g_{e_i}\psi + (k-\frac{1}{2})^2\theta_g(e_i)^2\psi \\
&\quad -k\theta_g(e_i)e_i\cdot\theta_g\cdot\psi - \frac{1}{4}|\theta_g|^2_g\psi
\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} D^{(k)}_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi) &= -\mathrm{tr}_g(D^{g,2})(\psi) + (k-\frac{1}{2})\mathrm{tr}(D^g\theta_g)\psi + (2k+1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi - \frac{1}{2}\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi \\
&\quad +\theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi + (k^2-\frac{n-1}{4})|\theta_g|^2\psi
\end{aligned} \tag{5}$$

De plus,

$$D_{e_i}e_i = 2\theta_g(e_i)e_i - \theta_g^\sharp$$

En sommant sur i de 1 à n, nous en déduisons :

$$\sum_{i=1}^{n} D_{e_i}e_i = (2-n)\theta_g^\sharp$$

Par conséquent,
$$\sum_{i=1}^{n} D^{(k)}_{D_{e_i}e_i}\psi = (2-n)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi + k(2-n)|\theta_g|^2_g\psi \tag{6}$$
La différence des équations (5) et (6) nous donne :
$$\begin{aligned} -\mathrm{tr}(D^{(k),2})(\psi) &= -\mathrm{tr}_g(D^{g,2})(\psi) + (k-\frac{1}{2})\mathrm{tr}(D^g\theta_g)\psi + (2k+n-1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi - \frac{1}{2}\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi \\ &\quad +\theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi + \left(k^2 - k(2-n) - \frac{1}{4}(n-1)\right)|\theta_g|^2_g\psi \end{aligned} \tag{7}$$
En sommant les expressions (1.3.2) et (7), puis en utilisant la formule de Lichnerowicz (proposition 1.3.1), nous obtenons la formule suivante :
$$\begin{aligned} \mathscr{D}^{(k-1)}\mathscr{D}^{(k)}\psi - \mathrm{tr}(D^{(k),2})(\psi) &= \frac{1}{4}\Big[Scal^g + 2(2k-1)\mathrm{tr}_g(D^g(\theta_g)) - (n-1)(n-2)|\theta_g|^2_g\Big]\psi \\ &\quad +\Big(k+\frac{n-2}{2}\Big)\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi \end{aligned} \tag{8}$$
Rappelons que la courbure scalaire de D, via la métrique g, s'identifie à une fonction sur M de la façon suivante :
$$Scal^D = Scal^g - 2(n-1)\mathrm{tr}_g(D^g\theta_g) - (n-1)(n-2)|\theta_g|^2_g$$
Ainsi, pour l'unique poids conforme $\frac{2-n}{2}$, la formule (5) ne dépend pas de la métrique g choisie et nous donne la formule souhaitée :
$$\mathscr{D}^2\psi - \mathrm{tr}(D^2)(\psi) = \frac{1}{4}Scal^D\psi$$
□

1.4 Formule de Lichnerowicz conforme II

Nous allons introduire des opérateurs invariants conformes généralisant la notion de divergence du cas riemannien et calculer des opérateurs adjoints dans un sens conforme. Notons d'abord qu'une structure de Weyl préserve l'application h.

Proposition 1.4.1. *Soient $\psi \in \Sigma^{(k)}$ et $\varphi \in \Sigma^{(l)}$. Toute structure de Weyl D préserve la forme bilinéaire h :*
$$\nabla^D\left(h(\psi,\varphi)\right) = h(D^{(k)}\psi,\varphi) + h(\psi, D^{(l)}\varphi) \tag{9}$$
où ∇^D agit sur $L^{(k+l)}$.

Démonstration. L'application h ne dépend que de la classe conforme c. De plus, toute structure de Weyl préserve la classe conforme. Par conséquent, toute structure de Weyl D préserve h, et donc nous obtenons la formule (2). □

Soient g et $\widetilde{g}$ deux métriques riemanniennes telles que $\widetilde{g} = f^2 g$. Notons $*^{\widetilde{g}}$ et $*^g$ les opérateurs de Hodge associés respectivement aux métriques $\widetilde{g}$ et g. Nous avons :
$$*^{\widetilde{g}}\omega^q = f^{n-2k} *^g \omega^q$$

où ω^q est une q-forme sur M. Par conséquent, il existe un opérateur de Hodge conforme naturel :

$$* \ : \ \Lambda^q M \otimes L^{(k)} \to \Lambda^{n-q} M \otimes L^{(n-2q+k)}$$

Pour X dans TM et ω une section de $\Lambda^q M \otimes L^{(k)}$, l'opérateur de Hodge conforme vérifie la relation suivante :

$$X \lrcorner \omega = *(X^\flat \wedge *\omega) \tag{10}$$

Pour $k = 2q - n$, nous pouvons définir un opérateur de divergence conforme par :

$$\delta = - * \circ d \circ *$$

où d est la différentielle extérieure sur M. Nous pouvons également définir un opérateur de divergence relatif à la structure de Weyl D, que nous notons δ^D. Soit $\{e_i\}$ une base locale c-orthonormée telle que $c(e_i, e_j) = \delta_{ij} l^2$. Nous définissons δ^D par :

$$\delta^D = -\sum_{i=1}^{n} (e_i \lrcorner D_{e_i})\, l^{-2}$$

Nous pouvons considérer qu'une structure de Weyl D agit sur les sections du fibré $\Lambda^q M \otimes L^{(k)}$. En effet, D agit par extension sur l'espace des q-formes sur M et sur les fibrés en droites $L^{(k)}$ via sa connexion linéaire associée ∇^D. Nous avons alors :

$$\delta^D \ : \ \Lambda^q M \otimes L^{(k)} \to \Lambda^{q-1} M \otimes L^{(k-2)}$$

Lorsqu'une métrique est fixée dans la classe conforme, l'opérateur de Hodge conforme et la divergence conforme s'identifient respectivement avec l'opérateur de Hodge et la divergence riemannienne relative à cette métrique. En revanche, la structure de Weyl n'est pas en général la connexion de Levi-Civita d'une métrique, par conséquent, les opérateurs δ et δ^D sont en général distincts.

Notons D^a l'opérateur antisymétrisé de la connexion sans torsion D défini par :

$$D^a = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge D_{e_i}$$

où $\{e_i\}$ est une base quelconque de TM.

Proposition 1.4.2. *L'opérateur $\delta^D : \Lambda^q M \otimes L^{(k)} \to \Lambda^{q-1} M \otimes L^{(k-2)}$ satisfait la relation suivante :*

$$\delta^D = - * \circ D^a \circ *$$

Démonstration. Soient $\{e_i\}$ une base locale c-orthonormée telle que $c(e_i, e_j) = \delta_{ij} l^2$ et ω une section de $\Lambda^q M \otimes L^{(k)}$. D'après la relation (10), nous avons :

$$\delta^D(\omega) = -\sum_{i=1}^{n} e_i \lrcorner D_{e_i}(\omega) l^{-2} = -\sum_{i=1}^{n} *\big(e_i^\flat \wedge *D_{e_i}(\omega)\big) l^{-2}$$

De plus, nous avons $e_i^* = e_i^\flat l^{-2}$, donc :

$$\begin{aligned}
\delta^D(\omega) &= -\sum_{i=1}^{n} *\big(e_i^\flat l^{-2} \wedge *D_{e_i}(\omega)\big) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} *\big(e_i^* \wedge *D_{e_i}(\omega)\big)
\end{aligned}$$

Enfin, la structure de Weyl préserve la classe conforme c, de telle sorte que l'opérateur $*$, qui ne dépend que de c, commute avec la connexion D. Ainsi :

$$\delta^D(\omega) = -*\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge D_{e_i}(*\omega)\Big)$$

Nous obtenons la formule suivante :

$$\delta^D(\omega) = -*\big(D^a(*\omega)\big)$$

□

Corollaire 1.4.3. *Sur l'espace des sections du fibré $\Lambda^q \otimes L^{(2q-n)}$, l'opérateur de divergence conforme δ et l'opérateur de divergence δ^D associé à la structure de Weyl D coïncident.*

Démonstration. Si ω est une section de $\Lambda^q \otimes L^{(2q-n)}$, alors $*\omega$ est une $(n-q)$-forme sur M. Cependant, pour toute connexion D sans torsion sur TM, nous avons $d = D^a$ sur l'espace des formes sur M. Ainsi, d'après la proposition 1.4.2, nous avons l'égalité $\delta = \delta^D$ sur $\Lambda^q \otimes L^{(2q-n)}$. □

Étudions l'existence d'un opérateur adjoint pour la connexion $D^{(k)}$ relativement au produit scalaire H sur les spineurs de poids k. Nous avons $D^{(k)} : \Sigma^{(k)} \to T^*M \otimes \Sigma^{(k)}$; par conséquent, l'adjoint $D^{(k)*}$ de $D^{(k)}$ doit agir sur les sections du fibré $T^*M \otimes \Sigma^{(k)}$. Soient ψ et φ dans $\Sigma^{(k)}$, et α dans T^*M. Nous devons trouver $D^{(k)*}$ tel que l'intégrale du terme suivant ait un sens et soit nulle :

$$h(D^{(k)}\psi, \alpha \otimes \varphi) - h(\psi, D^{(k)*}(\alpha \otimes \varphi)) \tag{11}$$

Les objets $D^{(k)}\psi$ et $\alpha \otimes \varphi$ sont de poids conforme $k-1$; par suite, $h(D^{(k)}\psi, \alpha \otimes \varphi)$ est de poids $k-2$. Ainsi, pour que les deux termes de l'expression (11) soient de même poids, $D^*(\alpha \otimes \varphi)$ doit être de poids conforme $k-2$. Nous en déduisons que l'intégrale de l'expression (11) a un sens si et seulement si $k = \dfrac{2-n}{2}$. Rappelons que nous notons D la structure de Weyl de poids $\dfrac{2-n}{2}$.

Proposition 1.4.4. *La structure de Weyl D de poids $\dfrac{2-n}{2}$ possède un adjoint formel, D^* : $T^*M \otimes \Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)} \to \Sigma^{\left(\frac{-1-n}{2}\right)}$, défini par :*

$$D^*(\alpha \otimes \varphi) = -D_{\alpha^\sharp}\varphi + \delta^D(\alpha)\varphi$$

pour $\alpha \in T^*M$ et $\varphi \in \Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. De plus, si ψ est une section de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$, nous avons la formule suivante :

$$h\big(D\psi, \alpha \otimes \varphi\big) - h\big(\psi, D^*(\alpha \otimes \varphi)\big) = -\delta^D\big(h(\psi, \alpha \otimes \varphi)\big) \tag{12}$$

Cette formule relie des sections du fibré $L_{\mathbb{C}}^{(-n)}$

Démonstration. Soient ψ et φ deux sections de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$ à support compact, et α une 1-forme sur M. Calculons

$$H(D\psi, \alpha \otimes \varphi) = \int_M h(D\psi, \alpha \otimes \varphi)$$

Soit $\{e_i\}$ une base locale c-orthonormée telle que $c(e_i,e_j)=\delta_{ij}l^2$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
h(D_{e_i}\psi,\alpha(e_i)\varphi)l^{-2} &= \nabla^D_{e_i}\left(h(\psi,\alpha(e_i)\varphi)l^{-2}\right)-h\big(\psi,D_{e_i}(\alpha(e_i)\varphi l^{-2})\big)\\
&= \nabla^D_{e_i}\big(h(\psi,\alpha(e_i)\varphi)\big)l^{-2}-h(\psi,\alpha(D_{e_i}e_i)\varphi)l^{-2}\\
&\quad -h\big(\psi,D_{e_i}(\alpha)(e_i)l^{-2}\varphi\big)-h\big(\psi,\alpha(e_i)l^{-2}D_{e_i}\varphi\big)
\end{aligned}$$

En sommant sur i, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n h(D_{e_i}\psi,\alpha(e_i)\varphi)l^{-2} &= \sum_{i=1}^n\Big(\nabla^D_{e_i}\big(h(\psi,\alpha(e_i)\varphi)\big)-h\big(\psi,\alpha(D_{e_i}e_i)\varphi\big)\Big)l^{-2}\\
&\quad +h\Big(\psi,-\sum_{i=1}^n\left(e_i\lrcorner D_{e_i}(\alpha)l^{-2}\right)\varphi\Big)-h\Big(\psi,\sum_{i=1}^n\alpha(e_i)D_{e_i}\varphi\Big)
\end{aligned}$$

Nous avons donc la formule suivante :

$$h\big(D\psi,\alpha\otimes\varphi\big)-h\big(\psi,(-D_{\alpha^\sharp}+\delta^D(\alpha))\varphi\big)=-\delta^D\big(h(\psi,\alpha\otimes\varphi)\big)$$

Cependant, $h(\psi,\alpha\otimes\varphi)$ étant une section de $\Lambda^1M\otimes L^{(2-n)}$, le corollaire 1.4.3 montre que :

$$\delta^D\big(h(\psi,\alpha\otimes\varphi)\big)=\delta\big(h(\psi,\alpha\otimes\varphi)\big)$$

Ainsi, d'après la formule de Stokes, nous avons :

$$\int_M\delta^D\big(h(\psi,\alpha\otimes\varphi)\big)=0$$

Nous obtenons alors :

$$H(D\psi,\alpha\otimes\varphi)=H\big(\psi,[-D_{\alpha^\sharp}+\delta^D(\alpha)]\varphi\big)$$

L'adjoint de D est donc donné par la formule suivante :

$$D^*(\alpha\otimes\psi)=-D_{\alpha^\sharp}\psi+\delta^D(\alpha)\psi$$

□

Lemme 1.4.5. *Soient $\{e_i\}$ une base c-orthonormée telle que $c(e_i,e_j)=\delta_{ij}l^2$. Nous avons la formule suivante :*

$$\sum_{i=1}^n\delta^D(e_i^*)D_{e_i}\psi=\sum_{i=1}^n l^{-2}D_{D_{e_i}e_i}\psi$$

pour tout ψ dans $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$.

Démonstration. Dans un premier temps, nous calculons :

$$\begin{aligned}
\delta^D(e_i^*) &= -\sum_{j=1}^n e_j\lrcorner D_{e_j}(e_i^*)l^{-2}\\
&= -\sum_{j=1}^n D_{e_j}(e_i^*(e_j))l^{-2}+\sum_{j=1}^n e_i^*(D_{e_j}e_j)l^{-2}\\
&= -\sum_{j=1}^n D_{e_j}(\delta_{ij})l^{-2}+\sum_{j=1}^n e_i^*(D_{e_j}e_j)l^{-2}\\
&= \sum_{j=1}^n e_i^*(D_{e_j}e_j)l^{-2}
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^D(e_i^*) D_{e_i}\psi = \sum_{i=1}^{n} D_{\delta^D(e_i^*)e_i}\psi$$

D'après ce qui précède, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^D(e_i^*) D_{e_i}\psi = \sum_{j=1}^{n} l^{-2} D_{\sum_{i=1}^{n} e_i^*\left(D_{e_j}e_j\right)e_i}\psi$$

Enfin, nous avons $\sum_{i=1}^{n} e_i^*\big(D_{e_j}e_j\big)e_i = D_{e_j}e_j$, ce qui nous donne :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^D(e_i^*) D_{e_i}\psi = \sum_{i=1}^{n} l^{-2} D_{D_{e_i}e_i}\psi$$

$\square$

Proposition 1.4.6. *Soit ψ un spineur de poids $\frac{2-n}{2}$. Pour toute structure de Weyl D, nous avons la formule suivante :*

$$D^* D\psi = \operatorname{tr}(D^2)(\psi)$$

où D agit sur $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$ via la structure de Weyl de poids correspondant.

Démonstration. Par définition de l'adjoint formel de la connexion D, nous avons :

$$D^* D\psi = D^*\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes D_{e_i}\psi\Big) = -\sum_{i=1}^{n} \Big(D_{(e_i^*)^\sharp}(D_{e_i}\psi) - \delta^D(e_i^*) D_{e_i}\psi\Big)$$

Cependant, nous avons $(e_i^*)^\sharp = e_i l^{-2}$, et donc, d'après le lemme 1.4.5, nous obtenons :

$$D^* D\psi = -\sum_{i=1}^{n} \big(D_{e_i}(D_{e_i}\psi) - D_{D_{e_i}e_i}\psi\big) l^{-2}$$

$\square$

Nous allons maintenant nous intéresser à des formule de type Lichnerowicz conforme mettant en jeux des sections du fibré des densités $L^{(-n)}$.

Proposition 1.4.7. *Soient ψ et φ deux sections du fibré $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. Nous avons la formule suivante :*

$$h(D\psi, D\varphi) = h(\psi, \operatorname{tr}(D^2)(\varphi)) - \delta^D\big(h(\psi, D\varphi)\big) \in L_{\mathbb{C}}^{(-n)}$$

Démonstration. Remarquons que $D\varphi$ est une section de $T^*M \otimes \Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. En remplaçant $\alpha \otimes \varphi$ par $D\varphi$ dans la formule (12) de la proposition 1.4.4, nous obtenons :

$$h(D\psi, D\varphi) - h(\psi, D^* D\varphi) = -\delta^D\big(h(\psi, D\varphi)\big)$$

La proposition 1.4.6 permet de conclure :

$$h\big(D\psi, D\varphi\big) - h\big(\psi, \operatorname{tr}(D^2)(\varphi)\big) = -\delta^D\big(h(\psi, D\varphi)\big)$$

$\square$

Corollaire 1.4.8. *Soient ψ et φ deux sections du fibré $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. Nous avons la formule suivante :*

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) = -\delta^D\big(h(\psi, D\varphi)\big) \in L_{\mathbb{C}}^{(-n)}$$

Démonstration. La proposition 1.4.7 nous donne :

$$h(D\psi, D\varphi)+\frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi)-h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) = h(\psi, \mathrm{tr}(D^2)(\varphi)+\frac{1}{4}Scal^D\varphi-\mathscr{D}^2\varphi)-\delta^D\big(h(\psi, D\varphi)\big)$$

De plus, la formule de Lichnerowicz conforme I (théorème 1.3.4) nous donne :

$$\mathrm{tr}(D^2)(\varphi) + \frac{1}{4}Scal^D\varphi - \mathscr{D}^2\varphi = 0$$

Nous obtenons donc la formule souhaitée. □

Menons le même calcul que dans la proposition 1.4.7 pour l'opérateur de Dirac $\mathscr{D}$ de poids conforme $\dfrac{2-n}{2}$.

Proposition 1.4.9. *Soient ψ et φ deux sections du fibré $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. Nous avons la formule suivante :*

$$h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) + \delta^D(\beta_{\psi,\varphi}) \in L_{\mathbb{C}}^{(-n)}$$

où $\beta_{\psi,\varphi}$ est la section de $T^*M \otimes L^{(2-n)}$ définie par : $\beta_{\psi,\varphi}(X) = h(\psi, X^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi)$

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ une base c-orthonormée telle que $c(e_i, e_j) = \delta_{ij}l^2$. Les propriétés de l'application h et de la structure de Weyl D nous donnent :

$$\begin{aligned}
h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) &= \sum_{i=1}^n h\big(e_i^* \cdot D_{e_i}\psi, \mathscr{D}\varphi\big) \\
&= -\sum_{i=1}^n h\big(D_{e_i}\psi, e_i^* \cdot \mathscr{D}\varphi\big) \\
&= -\sum_{i=1}^n \Big(\nabla^D\big(h(\psi, e_i^* \cdot \mathscr{D}\varphi)\big) - h\big(\psi, D_{e_i}(e_i^* \cdot \mathscr{D}\varphi)\big)\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^n \Big(\nabla^D\big(h(\psi, e_i^* \cdot \mathscr{D}\varphi)\big) - h\big(\psi, D_{e_i}(e_i^*) \cdot \mathscr{D}\varphi\big)\Big) + \sum_{i=1}^n h\big(\psi, e_i^* \cdot D_{e_i}(\mathscr{D}\psi)\big) \\
&= -\sum_{i=1}^n \Big(\nabla^D\big(h(\psi, e_i^\flat l^{-2} \cdot \mathscr{D}\varphi)\big) - h\big(\psi, D_{e_i}(e_i^\flat l^{-2}) \cdot \mathscr{D}\varphi\big)\Big) + h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) \\
&= -\sum_{i=1}^n \Big(\nabla^D\big(h(\psi, e_i^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi)\big) - h\big(\psi, D_{e_i}(e_i^\flat) \cdot \mathscr{D}\varphi\big)\Big)l^{-2} + h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) \\
&= -\sum_{i=1}^n \Big(\nabla^D\big(h(\psi, e_i^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi)\big) - h\big(\psi, (D_{e_i}e_i)^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi\big)\Big)l^{-2} + h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi)
\end{aligned}$$

En posant $\beta_{\psi,\varphi}(X) = h(\psi, X^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi)$, nous obtenons la formule souhaitée :

$$h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) + \delta^D(\beta_{\psi,\varphi})$$

□

Théorème 1.4.10. *Soit (M, c) une variété conforme orientée. Pour toute structure de Weyl D sur M, nous avons la formule de Lichnerowicz conforme II suivante :*

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = -\delta(\omega_{\psi,\varphi})$$

où ψ et φ sont des sections de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. La section $\omega_{\psi,\varphi}$ du fibré $T^*M \otimes L^{(2-n)}$ est définie par : $\omega_{\psi,\varphi}(X) = h\big(\psi, X^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi + D_X\varphi\big)$

Notons $|\psi|_h^2 = h\big(\psi, \psi\big)$, pour $\psi \in \Sigma$. D'après le théorème 1.4.10, pour toute structure de Weyl D sur la variété conforme (M, c) et toute section ψ du fibré des spineurs à poids Σ, nous avons :

$$|\psi|_h^2 + \frac{1}{4}Scal^D|\psi|_h^2 - |\mathscr{D}\psi|_h^2 = -\delta(\omega_\psi) \tag{13}$$

où $\omega_{\psi,\psi}$ est noté ω_ψ.

Remarque 1.4.11. *Les objets $D\psi$, $D\varphi$, $\mathscr{D}\psi$ et $\mathscr{D}\varphi$ sont de poids conforme $-n/2$. Par conséquent, $h(D\psi, D\varphi)$ et $h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi)$ sont de poids $-n$. De plus, le produit tensoriel $Scal^D\varphi$ est de poids conforme $-1 - n/2$, donc $h(\psi, Scal^D\varphi)$ est aussi de poids $-n$. Enfin, par définition de l'opérateur δ, l'objet $\delta(\omega_{\psi,\varphi})$ est une section de $L_{\mathbb{C}}^{(-n)}$. Le théorème ci-dessus donne une formule reliant des sections du fibré des densités d'intégration $L_{\mathbb{C}}^{(-n)}$.*

Démonstration. Les propositions 1.4.7 et 1.4.9 nous donnent :

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = h\big(\psi, \mathrm{tr}(D^2)(\varphi) + \frac{1}{4}Scal^D\varphi - \mathscr{D}^2\varphi\big) - \delta^D(\omega_{\psi,\varphi})$$

où $\omega_{\psi,\varphi} = h(\psi, D\varphi) + \beta_{\psi,\varphi}$. D'après la formule de Lichnerowicz conforme I (théorème 1.3.4), nous avons :

$$\mathrm{tr}(D^2)(\varphi) + \frac{1}{4}Scal^D\varphi - \mathscr{D}^2\varphi = 0$$

Nous avons donc la formule suivante :

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = -\delta^D(\omega_{\psi,\varphi})$$

Le corollaire 1.4.3 assure l'égalité des opérateurs δ^D et δ sur les sections du fibré $L^{(2-n)}$. Ainsi, $\omega_{\psi,\varphi}$ étant une section de $L^{(2-n)}$, nous obtenons la formule souhaitée. □

2 Structures conformes asymptotiquement plates

Soit (M, g) une variété riemannienne orientée, complète et non compacte de dimension n. Notons g_{can} la métrique plate sur $\mathbb{R}^n$.

2.1 Variétés asymptotiquement plates

Notons $E_R = \mathbb{R}^n \setminus B_R$ l'extérieur de la boule de centre 0 et de rayon R de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe un compact K de M et un difféomorphisme

$$\Phi \,:\, E_R \to M \setminus K$$

Notons $V = M \setminus K$. Le couple (V, Φ) est une carte à l'infini et V le bout de M. Dans cette carte $\Phi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, la norme d'un élément s'écrit :

$$|x| = r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $r > R$; notons $M_r = M \setminus E_r$, où E_r est confondu avec son image par Φ. L'ensemble M_r est un compact de M dont le bord s'identifie à la sphère S_r de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1. *Une variété riemannienne (M, g) est asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$ s'il existe une décomposition $M \setminus K = \sqcup_{l=1}^{k} M_\infty^l$, où K est un compact, et des difféomorphismes Φ_l de M_∞^l dans E_{R_l}, pour $R_l > 0$, tels que :*

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r_l^{-\tau}),\ \partial_k g_{ij} = O(r_l^{-\tau-1})\, et\ \partial_l \partial_k g_{ij} = O(r_l^{-\tau-2}),$$

quand $r_l = |x_l| \to \infty$, dans les coordonnées engendrées par le difféomorphisme Φ_l sur M_∞^l, pour l de 1 à k. Les ouverts M_∞^l sont les bouts de M et les coordonnées $\{x_l^i\}$ sont appelées coordonnées asymptotiques sur M_∞^l.

Supposons que (M, g) est une variété asymptotiquement plate d'ordre τ ne possédant qu'un seul bout M_∞. Soient $p > 1$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Nous notons ∇ la connexion de Levi-Civita associée à g. Sauf mention explicite du contraire, tout les objets riemanniens considérés sont relatifs à la métrique g. L'espace des fonctions L_δ^p est défini comme le complété de l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur M pour la norme :

$$||u||_{p,\delta} = \left(\int_M |u|^p r^{-\delta p - n} v_g\right)^{1/p}$$

où v_g est la forme volume associée à g et r est la distance radiale sur le bout M_∞ prolongée par 1 sur la partie compacte de M. Nous définissons également le k-ième espace de Sobolev de poids δ sur M, que l'on note $W_\delta^{k,p}$, comme le complété de l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur M pour la norme de Sobolev suivante :

$$||u||_{k,p,\delta} = \sum_{j=0}^{k} ||\nabla^j u||_{p,\delta-j} \tag{14}$$

L'espace des fonctions C_δ^k est défini comme l'ensemble des fonctions u, C^k sur M, dont la norme suivante est finie :

$$||u||_{C_\delta^k} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{M_\infty} r^{-\delta+j} |\nabla^j u| \tag{15}$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$; l'espace de Hölder de poids δ est défini par l'ensemble des fonctions u dans C_δ^k telles que la norme suivante est finie :

$$||u||_{C_\delta^{k,\alpha}} = ||u||_{C_\delta^k} + \sup_{x,y \in M_\infty} \left(\min(r(x), r(y))^{-\delta+k+\alpha} \frac{|\nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{|x-y|^\alpha}\right) \tag{16}$$

où y est dans un voisinage de x et $\nabla^k u(y)$ est le tenseur en x obtenu par transport parallèle le long de la géodésique radiale joignant x à y. Ces espaces de fonctions dépendent des coordonnées choisies sur le bout M_∞ de la variété. En revanche, les différents systèmes de coordonnées étant asymptotiques aux coordonnées euclidiennes, les normes relatives à deux systèmes de coordonnées différents sont équivalentes. La définition des normes de Hölder (15) et (16) nous donne immédiatement la proposition suivante :

Proposition 2.1.2. *Soit u appartenant à $C^{2,\alpha}_{-\tau}(M)$. Alors $u = O(r^{-\tau})$ et, pour i et j dans $\{1,\ldots,n\}$, $\partial_i u = O(r^{-\tau-1})$ et $\partial^2_{ij} u = O(r^{-\tau-2})$.*

Pour ces espaces de fonctions, nous avons également un théorème de Sobolev à poids [8] :

Proposition 2.1.3. *Soient $q > 1$ et $\alpha \in]0,1[$. Supposons que $l - k - \alpha > \dfrac{n}{q}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons les inclusions continues suivantes :*

$$C^{l,\alpha}_{\delta-\varepsilon} \subset W^{l,q}_{\delta} \subset C^{k,\alpha}_{\delta}$$

En particulier, si $u \in W^{l,q}_{\delta}$ avec $l > \dfrac{n}{q}$, $u = O(r^{\delta})$.

Définition 2.1.4. *La variété riemannienne (M,g) asymptotiquement plate d'ordre τ vérifie les conditions de décroissance de la masse lorsque :*

– *l'ordre τ de M est tel que :*

$$\frac{n-2}{2} < \tau < n-2$$

– *le tenseur $g - g_{can}$ appartient à $C^{2,\alpha}_{-\tau}(M^l_\infty)$, pour tout l de 1 à k.*

– *la courbure scalaire $Scal^g$ de la connexion de Levi-Civita ∇ est intégrable sur M.*

Notons $\mathcal{M}_\tau$ l'espace des métriques sur M vérifiant les conditions ci-dessus.

Lorsque une variété asymptotiquement plate (M,g) d'ordre τ à un seul bout M_∞ vérifie les conditions de la définition précédente, l'expression de la masse de cette variété est donnée par :

$$m(g) = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) e_j \lrcorner v_g$$

où ν est le champ de vecteurs unitaire sortant de la sphère S_r et g_{ij} sont les composantes de la métrique g dans les coordonnées asymptotiques sur M_∞. Si g appartient à l'espace $\mathcal{M}_\tau$, la masse de la variété riemannienne (M,g) est bien définie et ne dépend pas du système de coordonnées choisi [1]. Nous allons rappeler sans démonstration les résultats analytiques nécessaires à la démonstration du théorème de la masse positive dans le cas d'une variété spinorielle [1]. Ces résultats s'appuient sur les propriétés des espaces de Sobolev, de Hölder et sur des résultats de théorie elliptique pour lesquels le lecteur pourra se référer à [1]. Fixons une métrique g dans $\mathcal{M}_\tau$ et supposons que la variété M est spinorielle. Soit q un entier strictement supérieur à n.

Proposition 2.1.5. ([1] page 676) *Soient p dans $]1,+\infty[$ et δ non exceptionnel [1]. L'opérateur Laplacien $\Delta : W^{2,p}_{\delta} \to L^p_{\delta-1}$ est un opérateur de Fredholm. De plus, si $2 - n < \delta < 0$, c'est un isomorphisme de $W^{2,p}_{\delta}$ sur $L^p_{\delta-1}$.*

Nous définissons $W^{k,q}_{\delta}(\Sigma^g)$ l'espace de Sobolev des sections de Σ^g dont la norme de Sobolev définie de façon analogue à (14) est finie ; lorsqu'il n'y a pas d'ambigüités nous noterons également $W^{k,q}_{\delta}$ ces espaces. Le bout M_∞ de M, identifié à $\mathbb{R}^n \setminus B_R$, est munit des coordonnées asymptotiques $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Soit $e = (e_1,\ldots,e_n)$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ induite par x.

[1] Le paramètre $\delta \in \mathbb{R}$ est dit non exceptionnel s'il appartient à l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{k \in \mathbb{Z} \,:\, k \neq -1,-2,\cdots,3-n\}$.

Nous avons $g(\cdot,\cdot) = g_{can}(A\cdot,\cdot)$, où A est un champ de matrices symétriques définies positives. Nous définissons le repère g-orthonormé s de M_∞ par : $s = (A^{\frac{1}{2}})^{-1}e$, où $A^{\frac{1}{2}}$ est l'unique racine carré définie positive de A. Soit $\tilde{s}$ l'un des deux repères spinoriels relevant s. Un spineur ψ_0 de Σ^g s'appelle un spineur constant si $\psi_0 = [\tilde{s}, \xi_0]$, où la fonction $\xi : M_\infty \to \Delta_n$ est constante. En particulier, si ψ_0 est constant, sa norme $|\psi_0|$ est constante sur le bout à l'infini M_∞.

Définition 2.1.6. *Une section ψ de Σ^g est asymptotiquement constante s'il existe un spineur constant ψ_0 tel que $\psi - \psi_0 \in W^{2,q}_{-\tau}(\Sigma^g)$.*

Proposition 2.1.7. ([1] page 690) *Soit $1-n < \delta < 0$. L'opérateur de Dirac $\mathscr{D}^g : W^{2,q}_{\delta}(\Sigma^g) \to W^{1,q}_{\delta-1}(\Sigma^g)$ est un isomorphisme.*

Nous pouvons déduire de cette proposition l'existence d'un spineur $\mathscr{D}$-harmonique asymptotiquement constant. L'existence d'un tel spineur joue un rôle majeur dans la preuve de théorème de la masse positive.

Corollaire 2.1.8. ([1] page 690) *Soit ψ_0 un spineur constant sur M. Il existe un spineur ψ dans Σ^g tel que :*

$$\mathscr{D}^g\psi = 0$$

et

$$\psi - \psi_0 \in W^{2,q}_{-\tau}(\Sigma^g)$$

Démonstration. Les hypothèses de décroissance asymptotique donne $\mathscr{D}^g\psi_0 \in W^{1,q}_{-\tau-1}(\Sigma^g)$. D'après la proposition 2.1.7, il existe un unique spineur $\psi_1 \in W^{2,q}_{-\tau}(\Sigma^g)$ tel que $\mathscr{D}^g\psi_1 = -\mathscr{D}^g\psi_0$. Ainsi, le spineur $\psi = \psi_1 + \psi_0$ convient. □

Dans la méthode de Witten, en intégrant la formule de Lichnerowicz sur la variété asymptotiquement plate M, le terme de divergence converge sur le bout à l'infini vers la masse de la variété. Ce fait est donné par la proposition suivante :

Proposition 2.1.9. ([1] page 691) *Soit ψ dans Σ^g asymptotiquement constant. Nous avons alors la formule suivante :*

$$\int_M |\nabla\psi|^2 v_g + \frac{1}{4}\int_M Scal^g|\psi|^2 v_g - \int_M |\mathscr{D}^g\psi|^2 v_g = \lim_{r\to\infty}\int_{S_r} (\nabla_\nu\psi + \nu\cdot\mathscr{D}^g\psi, \psi)_g \nu \lrcorner v_g = \frac{1}{4}m(g)|\psi_0|^2$$

où ψ_0 est le spineur constant vérifiant $\psi - \psi_0 \in W^{2,q}_{-\tau}(\Sigma^g)$.

Nous avons alors le théorème de la masse positive [1] :

Théorème 2.1.10. *Soit (M,g) une variété riemannienne, spinorielle et asymptotiquement plate d'ordre τ telle que $g \in \mathcal{M}_\tau$. Supposons que la courbure scalaire de la connexion de Levi-Civita de g est positive. Alors la masse de (M,g) est positive. De plus, la masse est nulle si et seulement si M est isométrique à l'espace $\mathbb{R}^n$ euclidien.*

Démonstration. Soit ψ_0 un spineur constant. La proposition 2.1.9, appliquée au spineur donné par le corollaire 2.1.8, donne la formule suivante :

$$\int_M |\nabla\psi|^2 v_g + \frac{1}{4}\int_M Scal^g|\psi|^2 v_g = \frac{1}{4}m(g)|\psi_0|^2_g$$

Par hypothèse, la courbure scalaire $Scal^g$ de g est positive, donc la masse $m(g)$ de M est positive. □

Considérons l'ensemble de fonctions suivant :

$$\mathscr{F} = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{>0}) \,:\, f - 1 \in C^{2,\alpha}_{-\tau} \text{ et } \Delta(f) \in L^1\}$$

Chaque fonction dans $\mathscr{F}$ nous donne une métrique asymptotiquement plate dans la classe conforme de g. Nous avons le théorème suivant [12] :

Théorème 2.1.11. *Soit (M, g) une variété riemannienne asymptotiquement plate pour laquelle $g \in \mathcal{M}_\tau$. Soit $\tilde{g} = fg$. Alors, $\tilde{g}$ appartient à $\mathcal{M}_\tau$ si et seulement si f appartient à $\mathscr{F}$. De plus, leurs masses sont reliées par la formule suivante :*

$$m(\tilde{g}) = m(g) + (n-1)\int_M \Delta^g(f) v_g \tag{17}$$

Nous démontrons uniquement la formule (17). Dans la carte à l'infini associée à g, nous avons :

$$\partial_i(fg_{ij}) - \partial_j(fg_{ii}) = f(\partial_i(g_{ij}) - \partial_j(g_{ii})) + (g_{ij}\partial_i f - g_{ii}\partial_j f)$$

Posons $\mu_j = \sum_{i=1}^{n}(\partial_i(g_{ij}) - \partial_j(g_{ii}))\nu_j$. En écrivant $g_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}$ nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\partial_i(fg_{ij}) - \partial_j(fg_{ii})\right)\nu_j = \mu_j + (f-1)\mu_j + (1-n)\partial_j f \nu_j + \sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\partial_i f - a_{ii}\partial_j f)\nu_j$$

Pour terminer notre calcul, nous devons intégrer sur S_r et faire tendre r vers l'infini. Cependant, $\partial_i f = O(r^{-\tau-1})$, $a_{ij} = O(r^{-\tau})$, $\mu_j = O(r^{-\tau-1})$ et $f - 1 = O(r^{-\tau})$. Par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\partial_i f - a_{ii}\partial_j f)\nu_j = O(r^{-2\tau-1}) \text{ et } (f-1)\mu_j = O(r^{-2\tau-1})$$

avec $2\tau + 1 > n - 1$, donc les intégrales sur S_r de ces deux termes tendent vers 0 lorsque r tend vers l'infini. En sommant sur j, nous en déduisons la formule suivante :

$$m(\tilde{g}) = m(g) + (1-n)\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} df(\nu)\nu \lrcorner v_g$$

La formule de Stokes termine la démonstration :

$$m(\tilde{g}) = m(g) + (n-1)\lim_{r\to\infty}\int_{M_r} \Delta_g(f) v_g$$

Terminons ce paragraphe par un lemme dont nous aurons besoin ultérieurement dans cette note.

Lemme 2.1.12. *Soit (M, g) une variété asymptotiquement plate telle que $g \in \mathcal{M}_\tau$. Pour toute fonction f dans $\mathscr{F}$, nous avons :*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} \frac{df}{f}(\nu)\nu \lrcorner v_g = \lim_{r\to\infty}\int_{S_r} df(\nu)\nu \lrcorner v_g$$

Démonstration. Nous écrivons :

$$\int_{S_r} \frac{df}{f}(\nu)\nu \lrcorner v_g = \int_{S_r} (f^{-1}-1)df(\nu)\nu \lrcorner v_g + \int_{S_r} df(\nu)\nu \lrcorner v_g \tag{18}$$

La fonction f est strictement positive sur M et tend vers 1 à l'infini, il existe donc $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que $\varepsilon \leqslant f \leqslant C$. Par conséquent, la fonction f^{-1} est bornée sur M. De plus, $f-1 = O(r^{-\tau})$, nous avons alors : $f^{-1}-1 = -f^{-1}(f-1) = O(r^{-\tau})$, donc $(f^{-1}-1)|df| = O(r^{-2\tau-1})$ avec $2\tau+1 > n-1$. Nous en déduisons :

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (f^{-1}-1)df(\nu)\nu \lrcorner v_g = 0$$

Ainsi, par passage à la limite dans (18), nous obtenons la formule souhaitée :

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} f^{-1}df(\nu)\nu \lrcorner v_g = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} df(\nu)\nu \lrcorner v_g$$

□

2.2 Structures de Weyl asymptotiquement plates

Nous allons étendre la notion de platitude asymptotique aux structures de Weyl et généraliser les résultats rappelés dans la section précédente.

Définition 2.2.1. *Soient (M,c) une variété conforme de dimension n et D une structure de Weyl sur TM. Nous dirons que (M,c,D) est asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$ lorsqu'il existe une métrique g_0 dans c telle que :*

1. *La variété riemannienne (M,g_0) est asymptotiquement plate d'ordre τ telle que $g_0 \in \mathcal{M}_\tau$.*
2. *Pour tout entier l de 1 à k, la forme de Lee θ_0 de D relative à g_0 appartient à $W^{1,q}_{-\tau-1}(M^l_\infty)$, où M^l_∞ est le l-ème bout de (M,g_0) et $q > n$.*
3. *La codifférentielle par rapport à g_0 de la forme de Lee θ_0 est intégrable sur M.*

Nous dirons que la métrique g_0 est une métrique adaptée *pour la structure de Weyl asymptotiquement plate D.*

Soient (M,c) une variété conforme de dimension n et D une structure de Weyl sur TM. Supposons que (M,c,D) est asymptotiquement plate à un seul bout M_∞ et choisissons une métrique adaptée g_0 dans c. Sauf mention contraire, les objets riemanniens (∇, δ, etc. ...) et les espaces de fonctions dans toute la suite de cette partie sont définis relativement à la métrique g_0. Nous notons ∇ la connexion de Levi-Civita de g_0, v_0 sa forme volume et θ_0 la forme de Lee de D associée à g_0.

Définition 2.2.2. *Soient (M,c,D) une structure de Weyl asymptotiquement plate et g_0 une métrique adaptée. Nous définissons la masse de la structure de Weyl asymptotiquement plate par :*

$$m(D)(g_0) = m(g_0) + 2(n-1)\int_M \delta(\theta_0)v_0$$

où $m(g_0)$ est la masse riemannienne totale de la variété (M,g_0). La masse d'un bout M^l_∞ de M, notée $m^l(D)(g_0)$, est donnée par :

$$m^l(D)(g_0) = m^l(g_0) + 2(n-1)\lim_{r\to\infty}\int_{S^l_r} \theta_0(\nu_l)\nu_l \lrcorner v_g$$

où $m^l(g_0)$ est la masse riemannienne du bout M^l_∞, S^l_r la sphère de rayon r dans les coordonnées sur M_∞ et ν_l le champ de vecteurs sortant de la sphère S^l_r. La masse de la variété M est donc la somme des masses de chaque bout.

Soit g une métrique dans la classe conforme c telle que $g \in M_\tau$; nous définissons la quantité $m(D)(g)$ par :

$$m(D)(g) = m(g) + 2(n-1)\int_M \delta^g(\theta_g)v_g$$

où δ^g et v_g sont respectivement l'opérateur de divergence et la forme volume associés à g. Posons $\mathcal{M}^0_\tau = \{g = fg_0 \,:\, f \in \mathscr{F}\}$.

Proposition 2.2.3. *Soient (M, c, D) une structure conforme asymptotiquement plate et g_0 une métrique adaptée. Pour toute métrique g dans $\mathcal{M}^0_\tau$, nous avons :*

$$m(D)(g) = m(D)(g_0)$$

Démonstration. Soit $g = fg_0$ avec $f \in \mathscr{F}$. Nous supposons que la variété ne possède qu'un seul bout à l'infini. Par définition, nous avons :

$$m(D)(g) = m(g) + 2(n-1)\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} \theta_g(\nu)\nu \lrcorner v_g$$

Cependant, les deux métriques sont asymptotiquement plates dans le même système de coordonnées, donc nous pouvons remplacer v_g par v_0 dans la limite de l'intégrale. De plus, nous avons la formule :

$$\theta_g = \theta_0 - \frac{1}{2}\frac{df}{f} \tag{19}$$

Nous obtenons :

$$m(D)(g) = m(g) + 2(n-1)\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} \theta_0(\nu)\nu \lrcorner v_0 - (n-1)\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}\frac{df}{f}(\nu)\nu \lrcorner v_0$$

Le théorème 2.1.11 nous donne :

$$m(g) = m(g_0) + (n-1)\int_M \Delta(f)v_0$$

Et, d'après le lemme 2.1.12, nous avons :

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}\frac{df}{f}(\nu)\nu \lrcorner v_0 = \lim_{r\to\infty}\int_{S_r} df(\nu)\nu \lrcorner v_0 = \int_M \Delta(f)v_0$$

Nous déduisons le résultat de ces deux dernières formules :

$$m(D)(g) = m(g_0) + 2(n-1)\int_M \delta(\theta_0)v_0$$

$\square$

2.3 Sous-classes asymptotiquement plates

Nous savons, depuis R. Bartnik [1], que la masse riemannienne est un invariant géométrique : la masse ne dépend pas du système de coordonnées choisi sur le bout de la variété. Plus précisément, si g est asymptotiquement plate dans les coordonnées $\{z_i\}$ et $\{\widetilde{z}_i\}$, alors il existe une transformation E de $\mathbb{R}^n$, composée d'une isométrie et d'une translation, telle que $\widetilde{z} = E(z) + O(r^{-\tau})$, et dans ces conditions, les masses calculées dans ces deux systèmes de coordonnées sont égales.

Soient (M, c, D) une structure de Weyl asymptotiquement plate et g_0 une métrique adaptée pour D. Supposons que la variété ne possède qu'un seul bout à l'infini. Soit $\{z_i\}$ le système de coordonnées dans lequel g_0 est asymptotique à la métrique plate de $\mathbb{R}^n$. Considérons le système de coordonnées $\{\widetilde{z}_j\}$ sur M_∞ tel que $\widetilde{z}_i = az_i$, où $a \in \mathbb{R}^{>0}$.

Remarque 2.3.1. *La métrique g_0 n'est plus asymptotiquement plate dans les coordonnées $\{\tilde{z}_i\}$, mais il est clair que $a^2 g_0$ l'est.*

Notons respectivement $\widetilde{g}_{ij}$ et g_{ij} les composantes de g_0 dans les coordonnées $\{\widetilde{z}_i\}$ et $\{z_j\}$, puis $\tilde{\partial}_i$ et ∂_i les dérivées partielles par rapport aux coordonnées $\tilde{z}_i$ et z_i. Nous avons $d\tilde{z}_i = adz_i$ et $\widetilde{\partial}_i = a^{-1}\partial_i$. Par conséquent $\tilde{v}_0 = a^n v_0$ et :

$$\widetilde{g}_{ij} = a^{-2} g_{ij}$$

En dérivant par rapport à $\widetilde{z}_i$, nous obtenons :

$$\widetilde{\partial}_i(a^2\widetilde{g}_{ij}) = \widetilde{\partial}_i(g_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k g_{ij} \tilde{\partial}_i z_k = a^{-1}\partial_k g_{ij}$$

Nous en déduisons la formule suivante :

$$\left(\widetilde{\partial}_i(a^2\widetilde{g}_{ij}) - \widetilde{\partial}_j(a^2\widetilde{g}_{ii})\right) \widetilde{\partial}_j \lrcorner \widetilde{v_0} = a^{n-2} \left(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}\right) \partial_i \lrcorner v_0$$

En intégrant sur les sphères de rayon r, et en faisant tendre r vers l'infini, nous relions les masses de g_0 et $a^2 g_0$ par :

$$m(a^2 g_0) = a^{n-2} m(g_0)$$

Etudions le second membre de la masse de la structure de Weyl D. Rappelons que

$$\int_M \delta(\theta_0) v_0 = \int_M d(\theta_0^\sharp \lrcorner v_0)$$

Si $g = a^2 g_0$, où a est une constante, nous avons $\theta_g = \theta_0$ et $\theta_0^{\sharp_g} = a^{-2}\theta_0^{\sharp_0}$, où $\sharp_g$ et $\sharp_0$ sont les isomorphismes musicaux associés à g et g_0 respectivement. Par conséquent,

$$\int_M \delta^g(\theta_g) v_g = a^{n-2} \int_M \delta(\theta_0) v_0$$

Nous venons de démontrer :

Proposition 2.3.2. *Si g_0 est une métrique adaptée, nous avons :*

$$m(D)(ag_0) = a^{\frac{n-2}{2}} m(D)(g_0)$$

Nous savons désormais comment évolue notre masse lors d'un changement des coordonnées sur le bout de la variété de la forme $\widetilde{z} = aE(z) + O(r^{-\tau})$, où E est une transformation euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et a une constante positive. Nous dirons qu'un tel changement de coordonnées est asymptotiquement conforme.

Supposons désormais que notre structure de Weyl asymptotiquement plate possède k bouts, où k est supérieur ou égal à 1. Dans ce cas, la masse de la variété est définie comme la somme des masses de chacun des bouts. Rappelons que $m^l(g_0)$ est la masse riemannienne de (M, g_0) sur le bout M^l_∞ de M, et $m^l(D)(g_0)$ la masse de la structure de Weyl asymptotiquement plate sur le bout M^l_∞de M. Nous avons alors :

$$m(g_0) = \sum_{l=1}^{k} m^l(g_0)$$

et

$$m^l(D)(g_0) = m^l(g_0) + 2(n-1) \lim_{r\to\infty} \int_{S^l_r} \theta_0(\nu_l)\nu_l \lrcorner v_0$$

Soit $\{a_l\}_{l=1\dots k}$ une famille de $\mathbb{R}^{>0}$. Posons :

$$\mathscr{F}_{(a_1,\dots,a_k)} = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{>0}) \,:\, \Delta f \in L^1 \ et\ \forall l = 1\dots k \,, f - a_l \in C^{2,\alpha}_{-\tau}(M^l_\infty)\}$$

En particulier, notons $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{(1,\dots,1)}$.

Proposition 2.3.3. *Soient $g = fg_0$, avec f dans $\mathscr{F}_{(a_1,\dots,a_k)}$. Nous avons :*

$$m(D)(g) = \sum_{l=1}^{k} a_l^{\frac{n-2}{2}} m^l(D)(g_0)$$

En particulier, si $g_1 = f_1 g_0$ et $g_2 = f_2 g_0$, avec f_1 et f_2 dans $\mathscr{F}_{(a_1,\dots,a_k)}$, nous avons :

$$m(D)(g_1) = m(D)(g_2)$$

Démonstration. Fixons un bout M^l_∞ de (M, g_0). Sur M^l_∞, nous avons $f = a_l f_l$, où f_l appartient à $\mathscr{F}$ sur M^l_∞. D'après le théorème 2.1.11, la métrique $g_l = f_l g_0$ est asymptotiquement plate sur M^l_∞ et la proposition 2.2.3, adaptée pour le bout M^l_∞, donne :

$$m^l(D)(g_l) = m^l(D)(g_0)$$

Pour la métrique adaptée g_l, en utilisant la proposition 2.3.2, nous obtenons :

$$m^l(D)(g) = a_l^{\frac{n-2}{2}} m^l(D)(g_l)$$

Donc, nous avons :

$$m(D)(g) = \sum_{l=1}^{k} a_l^{\frac{n-2}{2}} m^l(D)(g_0)$$

$\square$

Par conséquent, la masse de D évaluée en $g = fg_0$ ne dépend pas de la fonction f choisie dans $\mathscr{F}_{(a_1,\dots,a_k)}$, mais uniquement des réels a_l et de la métrique de référence g_0. Une métrique adaptée étant fixée, nous remarquons que les ensembles de fonctions $\mathscr{F}_{a_1,\dots,a_k}$ définissent des sous-classes de métriques de la classe conforme c pour lesquelles la masse de la structure de Weyl est invariante. Notons $\Gamma = \{\mathscr{F}_{a_1,\dots,a_k} : (a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^n\}$. Nous avons alors une application :

$$m(D) \; : \; \Gamma \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$m(D)(\mathscr{F}_{a_1,\dots,a_k}) = m(D)(fg_0)$$

où f est une fonction quelconque de $\mathscr{F}_{a_1,\dots,a_k}$. L'espoir de cette remarque est de parvenir à démontrer que Γ constitue l'ensemble de toutes les métriques asymptotiquement plates de la classe conforme c. Dans ce cas, nous aurons défini une masse conforme $m(D)$ indépendante du choix de la métrique adaptée.

2.4 Théorème de la masse conforme positive

Soient (M, c, D) une structure de Weyl asymptotiquement plate ne possédant qu'un seul bout M_∞ et g_0 une métrique adaptée pour D. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de g_0. Supposons que M est une variété spinorielle. Notons $\Sigma = \Sigma^{(\frac{2-n}{2})}$ l'espace des spineurs conformes de poids $(2-n)/2$. Nous notons désormais Σ^0 le fibré des spineurs riemanniens relatif à la métrique g_0 et $\mathscr{D}^0$ l'opérateur de Dirac induit par ∇ sur Σ^0. Rappelons que les espaces de fonctions considérés sont relatifs à la métrique adaptée g_0.

Lemme 2.4.1. *Soit ψ une section du fibré des spineurs Σ^0. Supposons que ψ est D-parallèle, i.e $D\psi = 0$. Si ψ tend vers 0 dans M_∞, i.e. $\lim_{|x|\to\infty} |\psi(x)| = 0$, alors ψ est identiquement nulle.*

Démonstration. Soient x dans M et $\{e_i\}$ une base de T_xM. Calculons la différentielle de $|\psi|^2$: $d|\psi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(|\psi|^2)e_i^*$. La compatibilité de la connexion de Levi-Civita avec le produit scalaire donne $\nabla_{e_i}(|\psi|^2) = (\nabla_{e_i}\psi, \psi) + (\psi, \nabla_{e_i}\psi)$. Comme ψ est D-parallèle, la formule (4) donne :

$$\nabla_{e_i}\psi = \frac{n-1}{2}\theta_0(e_i)\psi + \frac{1}{2}e_i \cdot \theta_0 \cdot \psi$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}(|\psi|^2) &= (n-1)\theta_0(e_i)|\psi|^2 + \frac{1}{2}((e_i \cdot \theta_0 + \theta_0 \cdot e_i) \cdot \psi, \psi) \\ &= (n-2)\theta_0(e_i)|\psi|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, $d|\psi|^2 = (n-2)|\psi|^2\theta_0$. Soient x_0 dans M_∞ et γ une géodésique paramétrée sur $[0, +\infty[$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\lim_{t\to\infty} |\gamma(t)| = +\infty$. Posons $\phi(t) = |\psi|^2_{\gamma(t)}$ et $f(t) = \theta_0(\dot\gamma(t))$. La fonction ϕ est donc solution de l'équation différentielle ordinaire $\phi'(t) = (n-2)f(t)\phi(t)$ sur $[0, \infty[$. Par conséquent, pour tout t, $\phi(t) = c\exp(F(t))$, où c est une constante et F une primitive de f. Cependant, par hypothèse $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$, donc ϕ est identiquement nulle. Ceci étant vrai pour toute courbe allant vers l'infini sur M_∞, nous en déduisons que ψ est identiquement nul. $\square$

Soit ψ une section de Σ^0. Soit ω une 1-forme sur M. La formule de Stokes nous donne

$$-\int_{M_r} \delta(\omega) v_0 = \int_{S_r} \omega(\nu) \nu \lrcorner v_0$$

où ν est le champ de vecteurs normal unitaire sortant de S_r, et rappelons que M_r est le compact de M défini par $M_r = M \setminus E_r$ dont le bord s'identifie à la sphère S_r de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, si la limite existe, nous avons :

$$-\int_{M} \delta(\omega) v_0 = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \omega(\nu) \nu \lrcorner v_g$$

Proposition 2.4.2. *Soit $1-n < \delta < 0$. Supposons que la courbure scalaire $Scal^D$ de la connexion de Weyl est positive. Dans ces conditions, l'opérateur de Dirac de poids conforme $(2-n)/2$, $\mathscr{D}^2 : W^{2,q}_{-\tau}(\Sigma) \to L^q_{-\tau-2}(\Sigma)$, est un isomorphisme.*

Démonstration. Montrons que l'opérateur $\mathscr{D}^2$ est bien défini sur ces espaces de Sobolev. Soit ψ dans $W^{2,q}_{-\tau}(\Sigma)$. La proposition 1.2.4 et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$|\mathscr{D}\psi| \leqslant |\mathscr{D}^0\psi| + \frac{1}{2}|\theta_0||\psi|$$

Par hypothèse sur ψ, la norme $|\psi|$ est bornée sur M (puisque $|\psi| = O(r^{-\tau})$) et la proposition 2.1.7 nous donne $\mathscr{D}^0\psi \in W^{1,q}_{-\tau-1}$. De plus, la condition (2) de la définition 2.2.1 assure que θ_0 appartient également à $W^{1,q}_{-\tau-1}$. L'inégalité ci-dessus permet de conclure que $\mathscr{D}\psi$ est une section de $W^{1,q}_{-\tau-1}$. Par le même raisonnement en remplaçant ψ par $\mathscr{D}\psi \in W^{1,q}_{-\tau-1}$, nous démontrons que $\mathscr{D}^2\psi$ appartient à $W^{0,q}_{-\tau-2}$. Soit ψ dans $W^{2,q}_{-\tau}$ tel que $\mathscr{D}^2\psi = 0$, montrons que ψ est identiquement nul. Le corollaire 1.4.8 nous donne :

$$|D\psi|_h^2 + \frac{1}{4} Scal^D |\psi|_h^2 = -\delta\big(h(\psi, D\psi)\big)$$

En intégrant cette formule sur le compact M_r de M, pour $r > R$, nous avons :

$$\int_{M_r} |D\psi|_h^2 + \frac{1}{4}\int_{M_r} Scal^D |\psi|_h^2 = -\int_{M_r} \delta\big(h(\psi, D\psi)\big)$$

La métrique de référence g_0 étant fixé, la divergence conforme s'identifie avec la divergence riemannienne relative à g_0. Donc la formule de Stokes nous donne :

$$\int_{M_r} |D\psi|_h^2 + \frac{1}{4}\int_{M_r} Scal^D |\psi|_h^2 = \int_{S_r} (\psi, D_\nu\psi) \nu \lrcorner v_0 \tag{20}$$

où ν est le champ de vecteurs unitaire sortant de S_r. La formule (4) reliant la structure de Weyl et la connexion de Levi-Civita de la métrique g_0 nous donne :

$$(\psi, D_\nu\psi) = (\psi, \nabla_\nu\psi) + \frac{1-n}{2}\theta_0(\nu)|\psi|^2 + \frac{1}{2}(\nu\cdot\psi, \theta_0\cdot\psi)$$

Par l'inégalité triangulaire et de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$|(\psi, D_\nu\psi)| \leqslant |\nabla\psi||\psi| + \frac{n-1}{2}|\theta_0||\psi|^2 + \frac{1}{2}|\theta_0||\psi|^2$$

Par hypothèse sur la section ψ et la forme de Lee θ_0, nous avons $(\psi, D_\nu\psi) = O(r^{-2\tau-1})$, avec $2\tau + 1 > n - 1$. Par conséquent, nous arrivons à l'égalité suivante :

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (\psi, D_\nu\psi)\nu \lrcorner v_0 = 0$$

Nous en déduisons, par passage à la limite quand r tend vers l'infini dans (20), la formule suivante :

$$\int_M |D\psi|_h^2 + \frac{1}{4}\int_M Scal^D|\psi|_h^2 = 0$$

La courbure scalaire $Scal^D$ de la connexion de Weyl est positive, donc les deux termes intégrés sont nuls. En particulier, $D\psi = 0$ et ψ tend vers 0 à l'infini, donc, d'après le lemme 2.4.1, ψ est identiquement nul. Nous avons donc démontré que l'opérateur $\mathscr{D}^2 : W^{2,q}_{-\tau} \to L^q_{-\tau-2}$ est injectif. Cependant, la proposition 1.4.9 démontre que $\mathscr{D}^2$ est formellement autoadjoint :

$$\mathscr{D}^2 = (\mathscr{D}^2)^* \ : \ W^{2,q'}_{\tau+2-n} \to L^{q'}_{\tau-n}$$

Un raisonnement similaire démontre que cet opérateur est injectif (par hypothèse nous avons $1 - n < \tau + 2 - n < 0$). L'opérateur $\mathscr{D}^2$ est de Fredholm de noyau et conoyau trivial donc $\mathscr{D}^2$ est un isomorphisme de $W^{2,q}_{-\tau}$ dans $L^q_{-\tau-2}$ (voir [1]). □

Sous les hypothèses de cette section, nous sommes en mesure de démontrer la convergence vers la masse conforme de l'intégrale du terme de divergence dans la formule de Lichnerowicz conforme II.

Proposition 2.4.3. *Soit ψ un spineur asymptotiquement constant. La métrique adaptée g_0 étant fixée, nous avons la formule suivante :*

$$-\int_M \delta(\omega_\psi) = \frac{1}{4}m(D)(g_0)|\psi_0|^2$$

où ψ_0 est le spineur constant tel que $\psi - \psi_0 \in W^{2,q}_{-\tau}$, et où la section ω_ψ de $T^*M \otimes L^{(2-n)}$ est définie par : $\omega_\psi(X) = h\big(\psi, X^\flat \cdot \mathscr{D}\psi + D_X\psi\big)$.

Démonstration. La métrique g_0 étant donnée, la proposition 1.2.4 et la formule (4) appliquées pour g_0 permettent d'identifier ω_ψ à une 1-forme sur M par la formule suivante :

$$\omega_\psi(X) = \omega^0_\psi(X) + \frac{1-n}{2}\theta_0(X)|\psi|^2 \tag{21}$$

avec $\omega^0_\psi(x) = (\psi, X \cdot \mathscr{D}^0\psi + \nabla_X\psi)$. Soit ψ_0 le spineur constant tel que $\psi - \psi_0 \in W^{2,q}_{-\tau}$; la proposition 2.1.9 donne :

$$-\int_M \delta(\omega^0_\psi)v_0 = \lim_{r\to\infty}\int_{S_r} \omega^0_\psi(\nu)\nu\lrcorner v_0 = \frac{1}{4}m(g_0)|\psi_0|^2 \tag{22}$$

où ν est le champ de vecteurs unitaire sortant de S_r. Posons $\psi_1 = \psi - \psi_0$, nous avons :

$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_0|^2 + 2\Re\big((\psi_1, \psi_0)\big)$$

Cependant, $\psi_1 \in W^{2,q}_{-\tau}(\Sigma)$ et $\theta_0 \in W^{1,q}_{-\tau-1}$. Donc :

$$\theta_0(\nu)\left(|\psi_1|^2 + 2\Re\big((\psi_1, \psi_0)\big)\right) = O(r^{-2\tau-1})$$

avec $2\tau + 1 > n - 1$. Par conséquent, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} |\psi|^2 \theta_0(\nu) \nu \lrcorner v_0 = |\psi_0|^2 \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \theta_0(\nu) \nu \lrcorner v_0 \tag{23}$$

Remarquons que cette limite existe puisque la codifférentielle de la forme de Lee θ_0 est intégrable (condition (3) de la définition 2.2.1) et donc (23) devient :

$$\int_M \delta(|\psi|^2 \theta_0) v_0 = \Big(\int_M \delta(\theta_0) v_0 \Big) |\psi_0|^2 \tag{24}$$

Les équations (22) et (24) nous donnent l'égalité souhaitée :

$$-\int_M \delta(\omega_\psi) v_0 = \frac{1}{4} \Big(m(g_0) + 2(n-1) \int_M \delta(\theta_0) v_0 \Big) |\psi_0|^2$$

□

Théorème 2.4.4. *Soient (M, c) une variété conforme spinorielle et D une structure de Weyl asymptotiquement plate sur M. Supposons que la courbure scalaire $Scal^D$ de D est positive. Alors la masse $m(D)$ associée à D est positive et cette masse est nulle si et seulement si (M, c) est isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$ munit de la classe conforme canonique.*

Démonstration. Soient g_0 une métrique adaptée pour D et ψ_0 un spineur constant. Les hypothèses de décroissance asymptotique sur D nous donnent $\mathscr{D}\psi_0 \in W^{1,q}_{-\tau-1} \cap L^q_{-\tau-2}$. D'après la proposition 2.4.2, il existe $\psi_1 \in W^{2,q}_{-\tau}$ tel que $\mathscr{D}^2 \psi_1 = -\mathscr{D}\psi_0$. Cependant, par régularité elliptique, $\psi_1 \in W^{3,q}_{-\tau+1}$ et donc $\psi_2 := \mathscr{D}\psi_1 \in W^{2,q}_{-\tau}$. Posons $\psi = \psi_2 + \psi_0$. La section ψ est $\mathscr{D}$-harmonique et asymptotique au spineur constant ψ_0. En intégrant sur M_r la formule de Lichnerowicz conforme II (théorème 1.4.10), nous obtenons :

$$\int_{M_r} |D\psi|^2 v_0 + \frac{1}{4} \int_{M_r} Scal^D |\psi|^2 v_0 = -\int_{M_r} \delta(\omega_\psi) v_0$$

La proposition 2.4.3, par passage à la limite, nous donne alors :

$$\int_M |D\psi|^2 v_0 + \frac{1}{4} \int_M Scal^D |\psi|^2 v_0 = m(D)(g_0) |\psi_0|^2$$

Cependant, la courbure scalaire $Scal^D$ de la structure de Weyl D est positive, donc la masse $m(D)$ associée à D est positive d'après la formule précédente.

Supposons que la masse $m(D)$ soit nulle. Nous avons alors un spineur ψ dans Σ tel que :

$$\int_M |D\psi|_h^2 + \frac{1}{4} \int_M Scal^D |\psi|_h^2 = 0$$

Les deux termes de cette équation sont positifs, donc nuls. La section ψ est alors D-parallèle. Par conséquent, $|\psi|_h^{\frac{2}{2-n}}$ est une section ∇^D-parallèle du fibré L. En effet, le calcul donne :

$$\nabla^D |\psi|_h^{\frac{2}{2-n}} = \nabla^D \big(|\psi|_h^2 \big)^{\frac{1}{2-n}} = \frac{1}{2-n} |\psi|_h^{\frac{n-1}{2-n}} \big(h(D\psi, \psi) + h(\psi, D\psi) \big)$$

Ainsi, la structure de Weyl D est exacte, *i.e.* il existe une métrique g dans la classe conforme c dont D est la connexion de Levi-Civita. Écrivons $g = fg_0$, où f est une fonction strictement positive sur M. La structure de Weyl D étant la connexion de Levi-Civita de g, la forme de Lee θ_g associée est identiquement nulle et la formule (19) nous donne :

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\frac{df}{f}$$

Posons $h = \log(f)$. Nous avons $dh = \dfrac{df}{f}$, et $h \in C^{1,\alpha}_{-\tau-1}(M)$ par hypothèse sur θ_0.

Lemme 2.4.5. *Soit h une fonction C^∞ sur M. Supposons que dh appartient à $C^{1,\alpha}_{-\tau-1}(M)$. La fonction h possède une limite finie a telle que $h - a \in C^{2,\alpha}_{-\tau}(M)$.*

Démonstration. Soient x et y dans $E_R = \mathbb{R}^n \setminus B_R$ tels que $|y| \geqslant |x| \geqslant R_1$, pour $R_1 > R$. Soit $z = \dfrac{|x|}{|y|}y$ dans $\mathbb{R}^n$. Considérons X_t le grand arc de cercle paramétré sur $[0,1]$ joignant x et z. Nous avons $|X_t| = |x| \geqslant R_1$ et $|\dot{X}_t| \leqslant \pi|x|$. L'égalité des accroissement finis entre 0 et 1 (pour $f(t) = h(X_t)$) nous donne :

$$h(x) - h(z) = \int_0^1 dh_{X_t}(\dot{X}_t)dt$$

Par hypothèse, $|dh_{X_t}| = O(|X_t|^{-\tau-1})$, $|X_t| = |x|$ et $|\dot{X}_t| \leqslant \pi|x|$, nous obtenons alors l'inégalité suivante :

$$|h(x) - h(z)| \leqslant \pi C|x|^{-\tau}$$

où C est une constante positive indépendante de x et y. Comme $|x| \geqslant R_1$, cette inégalité implique :

$$|h(x) - h(z)| \leqslant \pi C R_1^{-\tau} \tag{25}$$

Posons $T = \dfrac{|x|}{|y|}$; l'égalité des accroissement finis entre z et y nous donne :

$$h(Ty) - h(y) = \int_0^1 dh_{y+t(Ty-y)}(Ty - y)dt$$

Par le même raisonnement que précédemment, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|h(Ty) - h(y)| \leqslant C|y|^{-\tau}\int_0^1 (1-T)\big(1+t(T-1)\big)^{-\tau-1}dt$$

Nous pouvons calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-T)\big(1+t(T-1)\big)^{-\tau-1}dt = \tau^{-1}\left(\frac{|x|^{-\tau}}{|y|^{-\tau}} - 1\right)$$

Nous en déduisons :

$$|h(Ty) - h(y)| \leqslant \tau^{-1}C(|x|^{-\tau} - |y|^{-\tau}) \leqslant \tau^{-1}CR_1^{-\tau} \tag{26}$$

Par conséquent, (25) et (26) établissent l'existence d'une constante C_1 indépendante de x et y telle que :

$$|h(x) - h(y)| \leqslant C_1 R_1^{-\tau}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons choisir R_1 suffisamment grand tel que, pour tout x et y dans E_r vérifiant $|y| \geqslant |x| \geqslant R_1$, $|h(x) - h(y)| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, d'après le critère de Cauchy, $h(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers l'infini. Par passage à la limite quand T tend vers l'infini dans l'inégalité (26), nous obtenons :

$$|h(x) - a| \leqslant \frac{C}{\tau}|x|^{-\tau} \tag{27}$$

pour tout x dans E_R. En observant la norme des espaces de Hölder à poids, nous pouvons remarquer que l'estimation (27) et l'hypothèse $dh \in C^{1,\alpha}_{-\tau-1}$ suffisent pour démontrer que h appartient à $C^{2,\alpha}_{-\tau}$. $\square$

En appliquant le lemme 2.4.5 à la fonction $h = \log(f)$, nous démontrons que f possède une limite finie strictement positive $b = \exp(a)$ à l'infini et que $f - b \in C^{2,\alpha}_{-\tau}$. En changeant f par $b^{-1}f$, nous ne modifions pas la connexion de Levi-Civita associée à g. Nous pouvons donc supposer que $g = fg_0$ avec $f \in \mathscr{F}$. D'après le théorème 2.1.11, la métrique g est asymptotiquement plate. Nous avons donc $\psi \in \Sigma^g$ tel que $D\psi = 0$, où D est la connexion de Levi-Civita de la métrique asymptotiquement plate g, la preuve du théorème de la masse positive [1] démontre dans ce cas que M est isométrique à $\mathbb{R}^n$ munit de la métrique plate. En conclusion, la variété conforme (M, c) est isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$ munit de sa classe conforme canonique. $\square$

Références

[1] R. Bartnik, *The Mass of an Asymptotically Flat Manifold*, Commun. Pure App. Math. **39** (1986), 661–692.

[2] P. Cruściel, M. Herzlich, *The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds*, Pacific. J. Math. **212(2)** (2003), 231–264.

[3] Xianzhe Dai, *A positive mass theorem for spaces with asymptotic SUSY compactification*, Comm. Math. Phys. **244** (2004), 335–345.

[4] G. B. Folland, *Weyl manifolds* , J. Differential Geometry **4** (1970), 145–153.

[5] H. B. Lawson, M. Michelson, *Spin geometry*, Princeton University Press (1989).

[6] P. Gauduchon, *L'opérateur de Penrose Kählérien et les inégalités de Kirchberg*, non publié (1995).

[7] P. Gauduchon, *Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur une variété conforme autoduale*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **18 (4)** (1991), 563–629.

[8] J. Lee, T. Parker,*The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1982), 37–91.

[9] V. Minerbe, *A mass for ALF manifolds*, ArXiv[0803.2873], (2008).

[10] A. Moroianu, *Géométrie spinorielle et groupes d'holonomie* , Collège de France **cours Peccot** (1998).

[11] T. Parker, C. H. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **84** (1982), 223–238.

[12] W. Simon, *Conformal Positive Mass Theorems*, Mathematical Physics **50** (1999), 275–281.

[13] H. Weyl, *Space-Times-Matter*, Dover Publications (1922).

[14] E. Witten, *A simple proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **80** (1931), 381–402.